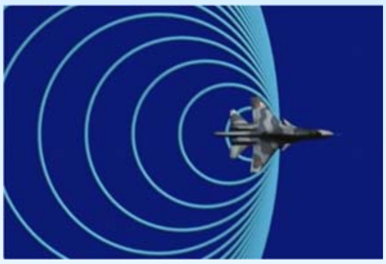
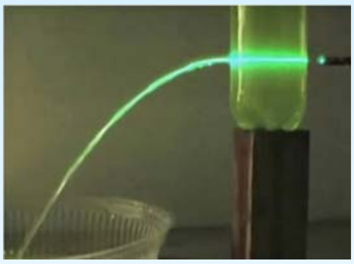
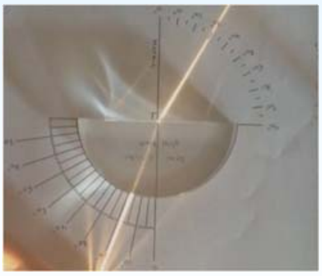
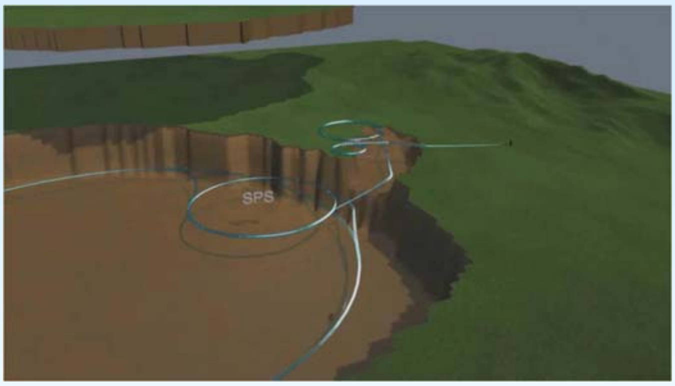
Vågrörelselära och optik



Kapitel 14 – Harmonisk oscillator

Vågrörelselära och optik



Vågrörelselära och optik

Kurslitteratur: University Physics by Young & Friedman (14th edition)

Harmonisk oscillator:	Kapitel 14.1 – 14.4
Mekaniska vågor:	Kapitel 15.1 – 15.8
Ljud och hörande:	Kapitel 16.1 – 16.9
Elektromagnetiska vågor:	Kapitel 32.1 & 32.3 & 32.4
Ljusets natur:	Kapitel 33.1 – 33.4 & 33.7
Stråloptik:	Kapitel 34.1 – 34.8
Interferens:	Kapitel 35.1 – 35.5
Diffraktion:	Kapitel 36.1 - 36.5 & 36.7

Vågrörelselära och optik

Tid	Må	31-Oct	Ti	01-Nov	On	02-Nov	To	03-Nov	Fr	04-Nov
08-10										
10-12			Våglära (A)	kap 14 kap 14	Våglära (A)	kap 14 kap 15			Våglära (A)	kap 15 kap 15
13-15			Övningar Optik&Våg (L218-19)						Övningar Optik&Våg (L218-19)	
15-17										

Tid	Må	07-Nov	Ti	08-Nov	On	09-Nov	To	10-Nov	Fr	11-Nov
08-10							Våglära (A)	kap 16 kap 32		
10-12	Våglära (A)	kap 15 kap 16	Våglära (A)	kap 16 kap 16					Våglära/Optik (A)	kap 32 kap 33
13-15			Övningar Optik&Våg (kl. 13-16) (L218-19)						Övningar Optik&Våg (L218-19)	
15-17										

Tid	Må	14-Nov	Ti	15-Nov	On	16-Nov	To	17-Nov	Fr	18-Nov
08-10										
10-12	Optik (A)	kap 33 kap 34	Optik (A)	kap 34 kap 34					Optik (A)	kap 34 kap 34
13-15			Övningar Optik&Våg (L218-19)						Övningar Optik&Våg (L218-19)	
15-17										

Tid	Må	21-Nov	Ti	22-Nov	On	23-Nov	To	24-Nov	Fr	25-Nov
08-10			Optik (A)	kap 35 kap 36						
10-12	Optik (A)	kap 34 kap 35	Optik (A)	kap 36 kap 36						
13-15			Övningar Optik&Våg (L218-19)							
15-17										

Ny web sida

Föreläsningar i våglära och optik under 2016

Schema (pdf)
Kapitel att studera (pdf)
Uppgifter (pdf)
Formelsamling (pdf)

Gamla tentor i våglära: 2010 2011 2012 2013 2014 2015

Gamla tentor i optik: 2010 2011 2012 2013 2014 2015

Kapitel 14 - Harmonisk svängning

Föreläsningsanteckningar (pdf)

Spray paint oscillator

Simple harmonic motion

Hooke's Law: force exerted by a spring

http://hedberg.home.cern.ch/hedberg/home/optik2016.html

Inledning

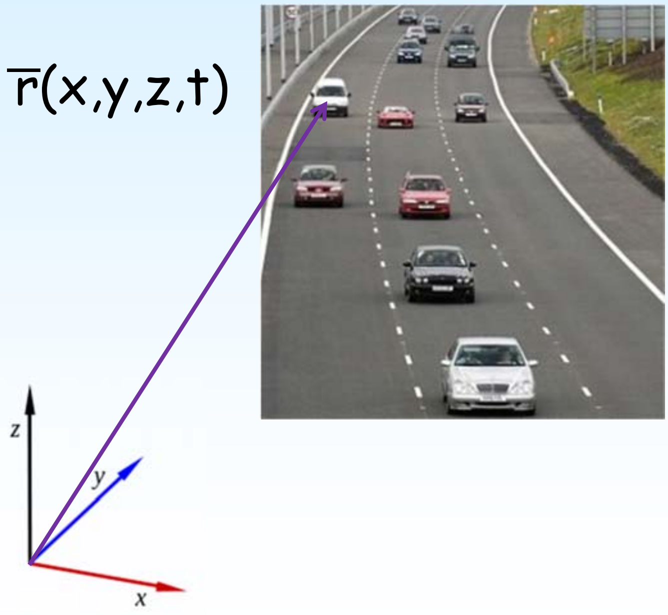
Enkel teoretisk modell:

Hastighet = Avstånd / Tid

Inledning

Mer komplicerad modell:
Position = $\bar{r}(x,y,z,t)$

$\bar{r}(x,y,z,t)$



Hastighet =
derivatan av $\bar{r}$ med
avseende på tiden

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)\, dt$$

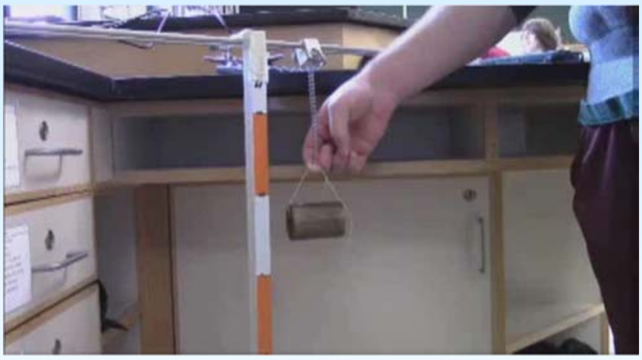
$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \int \mathbf{a}(t)\, dt$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Harmonisk Svängning

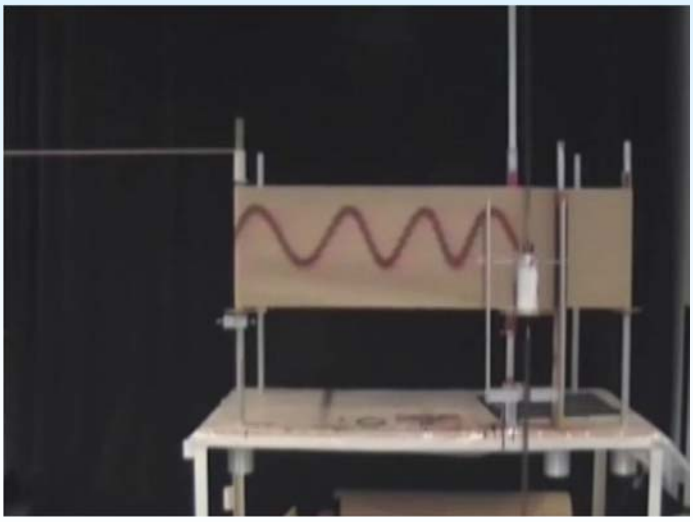
Del 1. Vad är harmonisk svängning och hur kan den beskrivas matematiskt ?

Harmonisk Svängning
Exempel



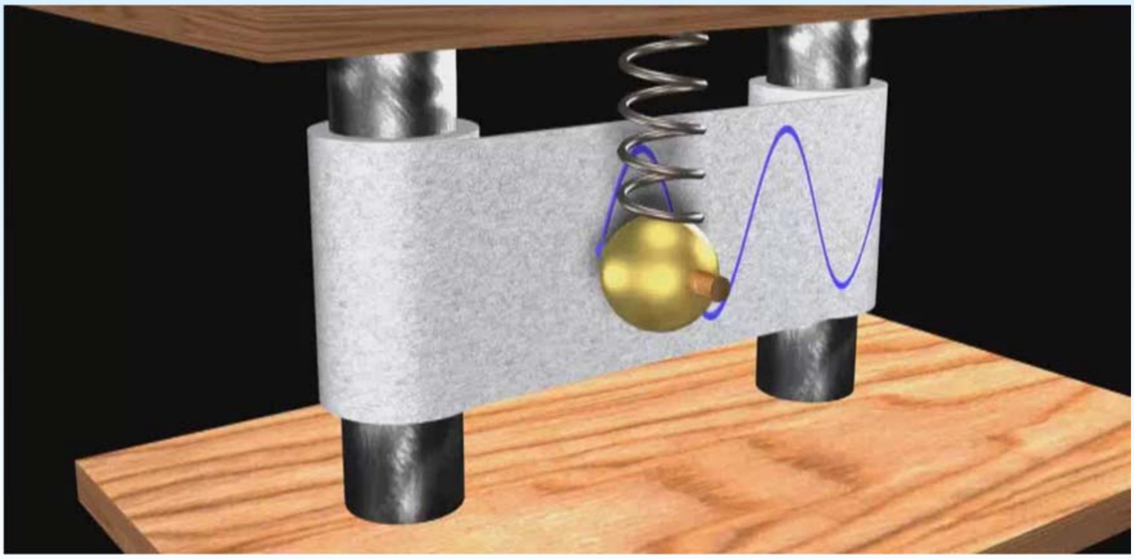
Harmonisk Svängning
Experiment

Ett experiment som hjälper oss att hitta en matematisk beskrivning av harmonisk svängning:



https://www.youtube.com/watch?v=p9uhmjbZn-c

Harmonisk Svängning
Experiment

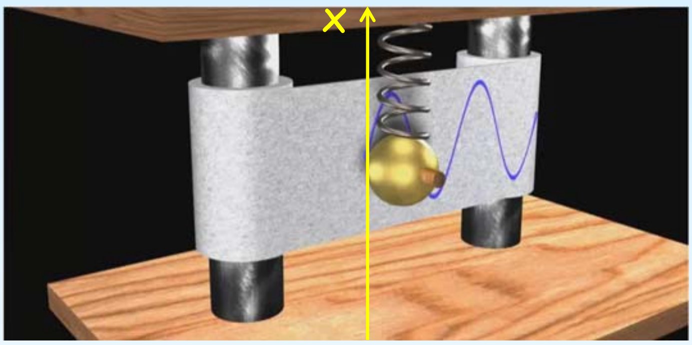


Slutsats: Harmonisk svängning kan beskrivas av funktionen

$x = A \sin(Bt + C)$

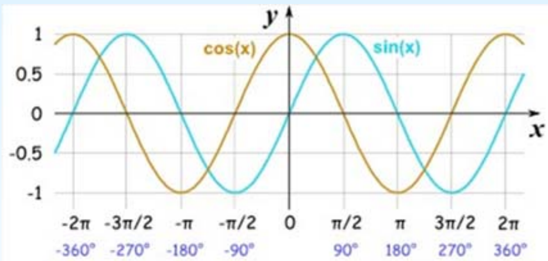
om t är tiden och A, B och C är konstanter som beskriver rörelsen.

Harmonisk Svängning
Funktionen



$$x = A \sin(Bt + C) \text{ eller}$$

$$x = A \cos(Bt + C - \pi/2)$$



x : Vertikal förflyttning. Enhet: meter

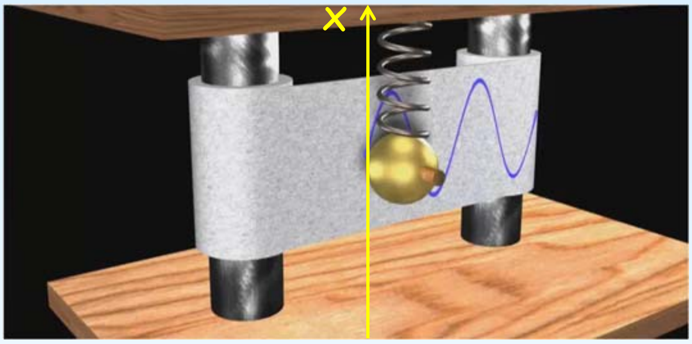
t : Tid. Enhet: sekund

A : Amplitud (maximal förflyttning). Enhet: meter

B = ω : Vinkel frekvens (antal svängningar per sekund gånger 2π).
Enhet: Radianer per sekund

C = ϕ : Fas vinkel (bestämmer läget vid tiden = 0). Enhet: radianer

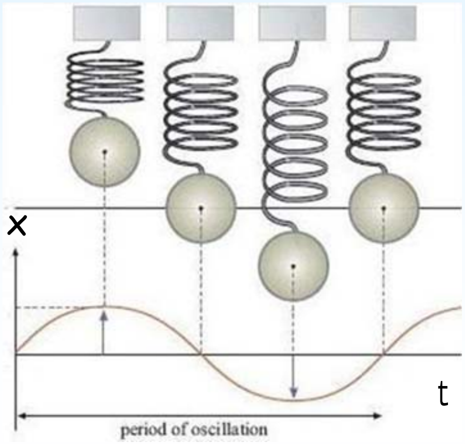
Harmonisk Svängning
f och T



$x = A\sin(\omega t + \phi')$

eller

$x = A\cos(\omega t + \phi)$



T: Period = tiden det tar för massan att åka upp och ner. Enhet: sekund

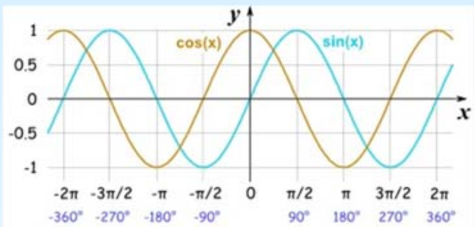
f: Frekvens = Antalet perioder per sekund.
Enhet: 1/sekund = Hz

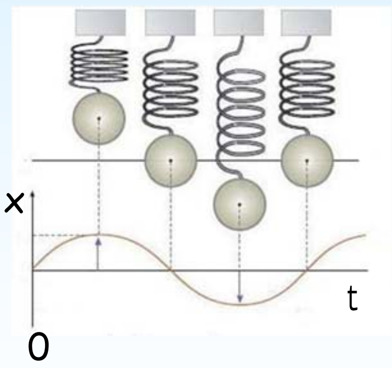
$f = 1 / T$ $\qquad\qquad$ $\omega = 2\pi f$

Harmonisk Svängning
fas vinkel

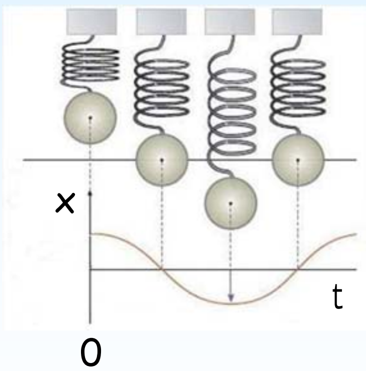
$x = A\sin(\omega t + \phi')$ eller $x = A\cos(\omega t + \phi)$

Fas vinkeln (ϕ) bestämmer läget vid tiden = 0.
För då gäller: $x = A\sin(\phi')$ eller $x = A\cos(\phi)$

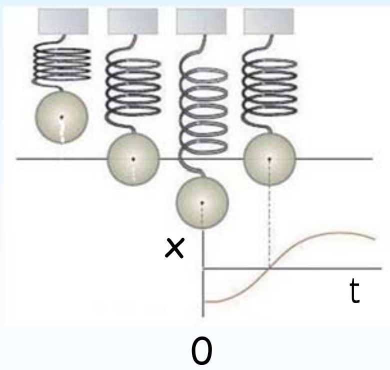




$X = A\sin(\omega t)$
$X = A\cos(\omega t - \pi/2)$



$X = A\cos(\omega t)$
$X = A\sin(\omega t + \pi/2)$



$X = A\cos(\omega t + \pi)$
$X = A\sin(\omega t - \pi/2)$

Harmonisk Svängning
v och a

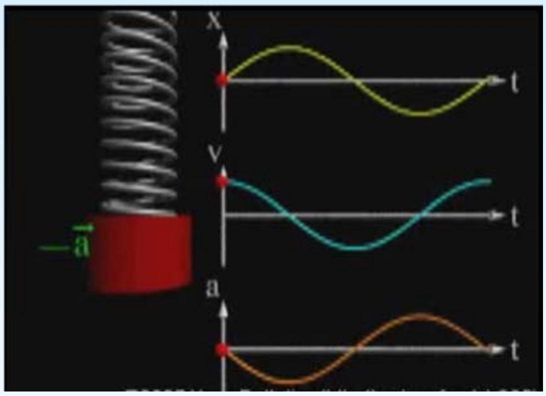
Vi har nu en matematisk beskrivning av läget (den vertikala förflyttningen).

Vad är hastigheten och accelerationen ?

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

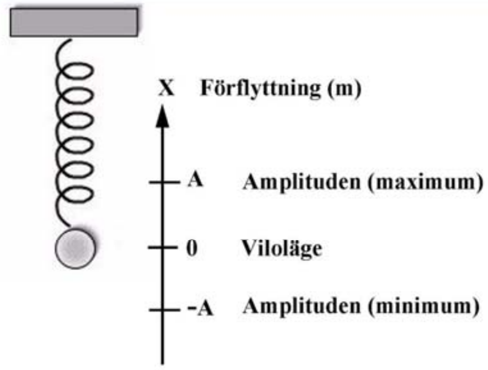
Harmonisk Svängning
v och a

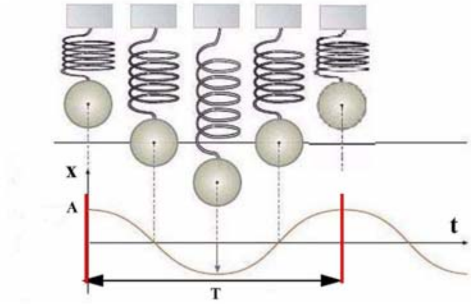


Förflyttning:		$x = A\sin(\omega t)$	$\longrightarrow$	$x_{max} = A$
Hastighet:	$v = \frac{dx}{dt}$	$v = \omega A\cos(\omega t)$	$\longrightarrow$	$v_{max} = \omega A$
Acceleration:	$a = \frac{dv}{dt}$	$a = -\omega^2 A\sin(\omega t)$	$\longrightarrow$	$a_{max} = \omega^2 A$

https://www.youtube.com/watch?v=eeYRkW8V7Vg

Harmonisk Svängning
Sammanfattning





$\phi = \mathrm{acos}(x_0 / A) = \mathrm{acos}(A/A) = 0$

- x Förflyttning (m)
- A Amplitud (m)
- t Tid (s)
- T Period (s)
- f Frekvens (Hz) $= 1 / T$
- ω Vinkelfrekvens (rad/s) $= 2\pi / T = 2\pi f$
- ϕ Fasvinkel (rad) $= \mathrm{acos}(x_0 / A)$

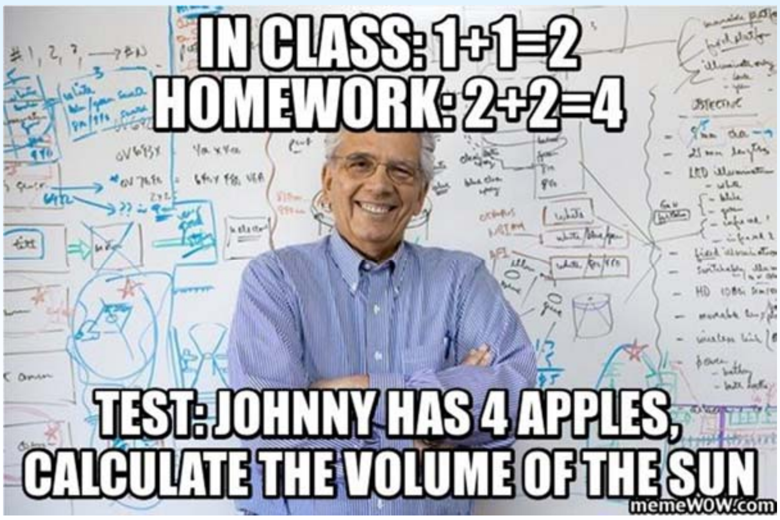
$$x = A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow x_{max} = A$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\phi) \longrightarrow v_{max} = \omega A$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$$

Harmonisk Svängning
Problem

Del 2. Problem lösning



Harmonic oscillation
Problem

En ultraljuds apparat använder ljud med frekvensen
6.7×10^6 Hz.

Hur lång tid tar varje svängning och vilken vinkelfrekvens motsvarar detta ?

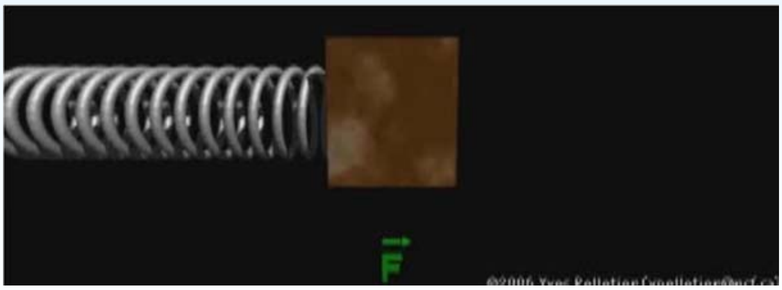
$\boxed{\begin{array}{l} f = 1/T \\ \omega = 2\pi f \end{array}}$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6.7 \times 10^6 \text{ Hz}} = 1.5 \times 10^{-7}\text{ s} = 0.15\ \mu\text{s}$$

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f = 2\pi(6.7 \times 10^6 \text{ Hz}) \\ &= (2\pi \text{ rad/cycle})(6.7 \times 10^6 \text{ cycle/s}) \\ &= 4.2 \times 10^7 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

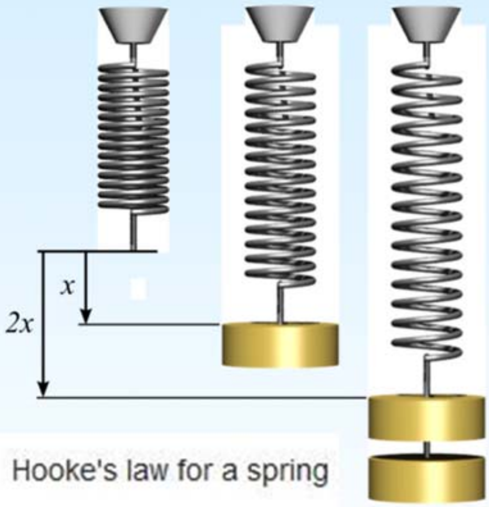
Harmonisk Svängning
Fjädern & Krafter

Del 3. Fjädrar, Hookes lag & Krafter



https://www.youtube.com/watch?v=_ca77OYbeZw

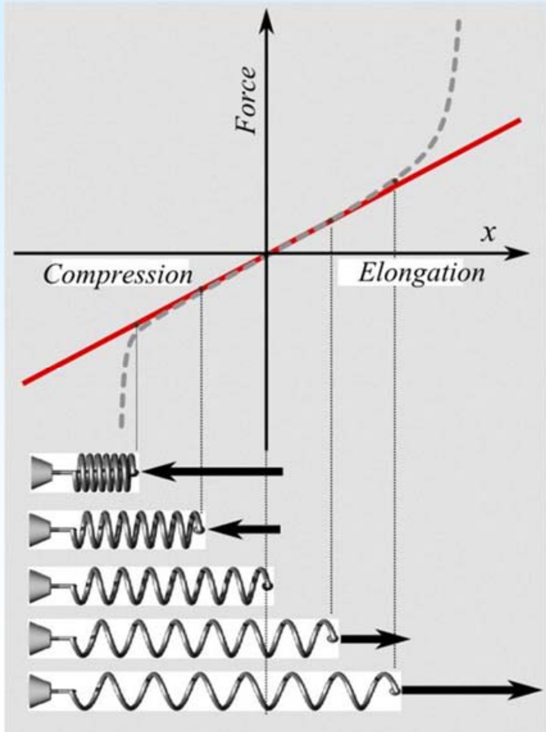
Harmonisk Svängning
Fjädern



Hooke's law for a spring

$$F = -kX$$

k = fjäderkonstanten
beskriver hur styv fjädern är



Harmonisk Svängning
Krafter

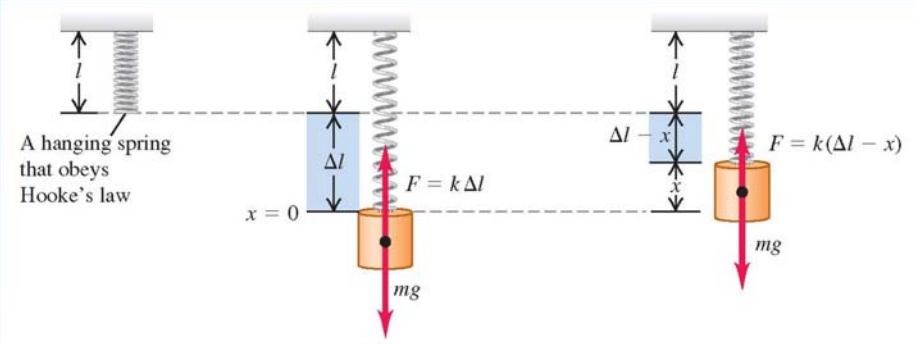
Newton's first law of motion: A body acted on by no net force moves with constant velocity (which may be zero) and zero acceleration.

Newton's second law of motion: If a net external force acts on a body, the body accelerates. The direction of acceleration is the same as the direction of the net force. The mass of the body times the acceleration of the body equals the net force vector.

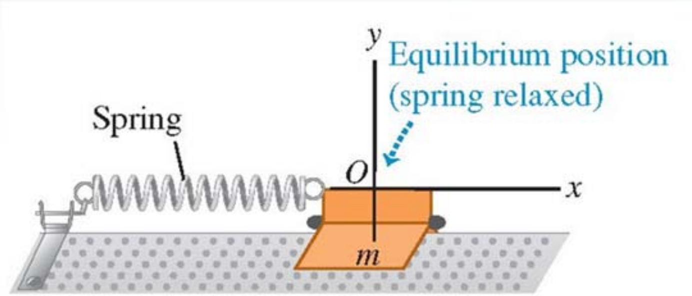
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{(Newton's second law of motion)}$$

Harmonisk Svängning: Fjädern

Vertikal svängning
Gravitationen drar ut fjädern till ett nytt jämviktsläge.



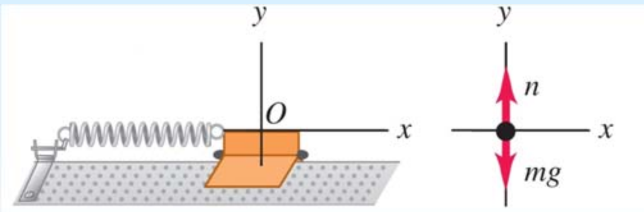
Horisontell svängning
Detta är inte fallet om fjädern är horisontell.



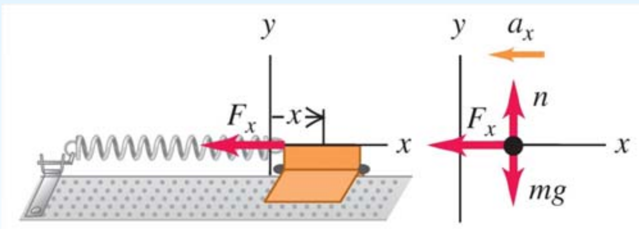
Svängningarna blir emellertid de samma !

Harmonisk Svängning Krafter

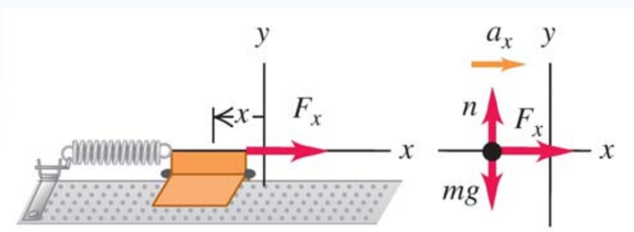
$x = 0 \quad F_{total} = 0 \quad a_x = 0$



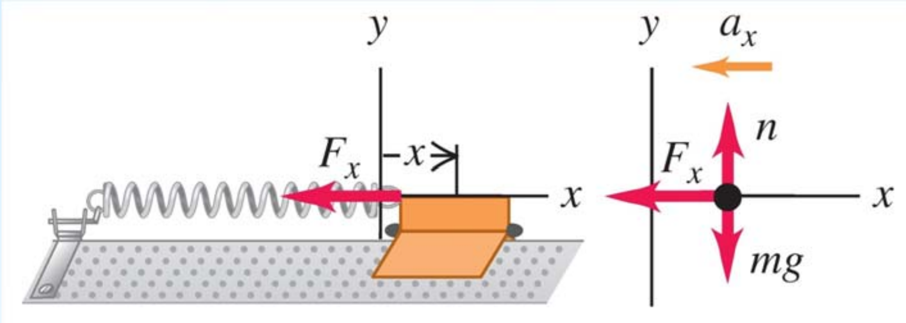
$x > 0 \quad F_{total} < 0 \quad a_x < 0$



$x < 0 \quad F_{total} > 0 \quad a_x > 0$



Harmonisk Svängning
Krafter



$F_x = -kx$ (restoring force exerted by an ideal spring)

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ (Newton's second law of motion)

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \text{(simple harmonic motion)}$$

Harmonisk Svängning
Krafter

Gamla formler:

$x = A\cos(\omega t+\phi)$

$v = -\omega A\sin(\omega t+\phi)$

$a = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi)$

$$a_x = -\omega^2 x$$

Ny formel:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \text{(simple harmonic motion)}$$

Kombinera gammalt med nytt:

$$-\omega^2 x = -\frac{k}{m}x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Frekvensen beror av två saker:

1. Fjäderkonstanten
2. Massan

Harmonisk Svängning
Krafter

Man kan se på svängningarna på ett annat sätt:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad \text{(simple harmonic motion)}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Detta är en differential ekvation som har lösningen:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

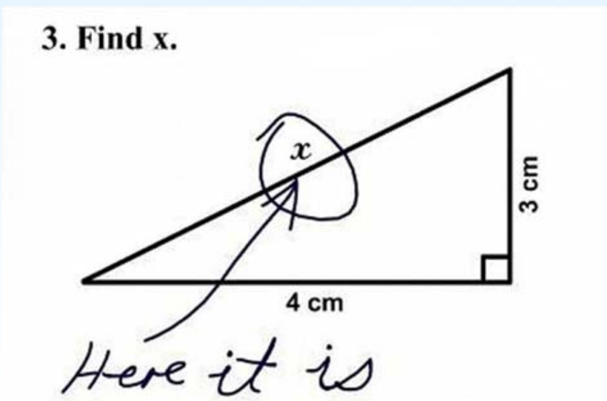
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$-\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{k}{m}A\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

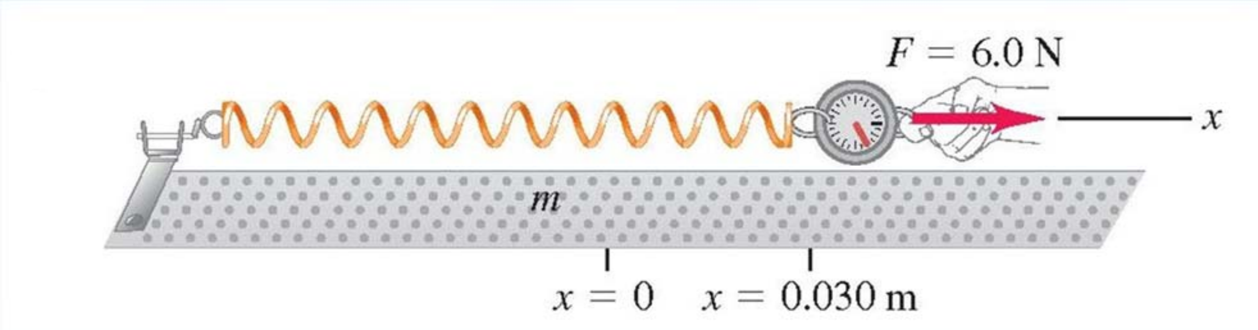
$$-\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) + \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

Harmonisk Svängning
Problem

Del 4. Problem lösning



Harmonisk Svängning
Problem



Vad är fjäder konstanten ?

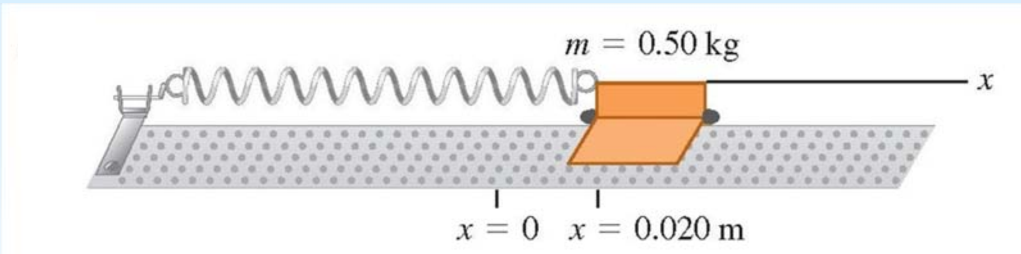
Hooke's law for a spring

$$F = -kX$$

$$k = -\frac{F_x}{x} = -\frac{-6.0\ \text{N}}{0.030\ \text{m}} = 200\ \text{N/m} = 200\ \text{kg/s}^2$$

Harmonisk Svängning
Problem

$k = 200\ \text{kg/s}^2$



Massan drages tillbaka 2 cm och släpps.

Vad blir vinkelfrekvensen, frekvensen och perioden av svängningarna ?

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} = \sqrt{\frac{200\ \text{kg/s}^2}{0.50\ \text{kg}}} = 20\ \text{rad/s}$$

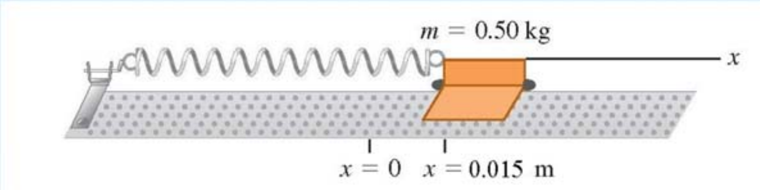
$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}} = \frac{20\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad/cycle}} = 3.2\ \text{cycle/s} = 3.2\ \text{Hz}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{f}} = \frac{1}{3.2\ \text{cycle/s}} = 0.31\ \text{s}$$

Harmonisk Svängning Problem

$k = 200\ kg/s^2$

$\omega = 20\ rad/s$



t = 0

$x_0 = 0.015\ m$

$v_0 = +0.40\ m/s$

Vad är amplituden och fasvinkeln ?

$$x = A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow x_{max} = A$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\phi) \longrightarrow v_{max} = \omega A$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$$

t = 0

$$x_0 = A\cos\phi$$

$$v_{0x} = -\omega A\sin\phi$$

$$\frac{v_{0x}}{x_0} = \frac{-\omega A\sin\phi}{A\cos\phi} = -\omega\tan\phi$$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right) = \arctan\left(-\frac{0.40\ \text{m/s}}{(20\ \text{rad/s})(0.015\ \text{m})}\right) = -53^\circ = -0.93\ \text{rad}$$

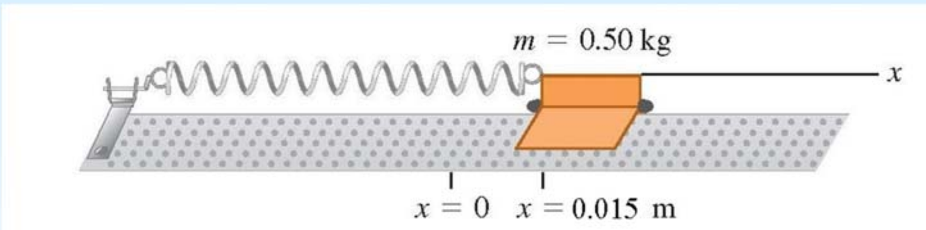
$$A = x_0 / \cos\phi = 0.015 / \cos(-0.93) = 0.025\ \text{m}$$

Harmonisk Svängning Problem

$\omega = 20\ rad/s$

$\phi = -0.93\ rad$

$A = 0.025\ m$



Vad är ekvationerna för läget, hastigheten och accelerationen ?

$$x = A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow x_{max} = A$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\phi) \longrightarrow v_{max} = \omega A$$

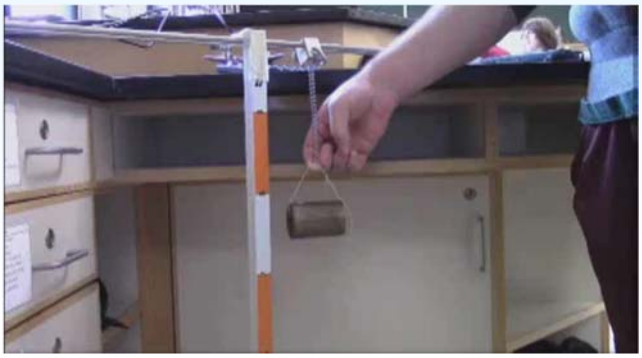
$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$$

$$x = (0.025\ \text{m})\cos[(20\ \text{rad/s})t - 0.93\ \text{rad}]$$

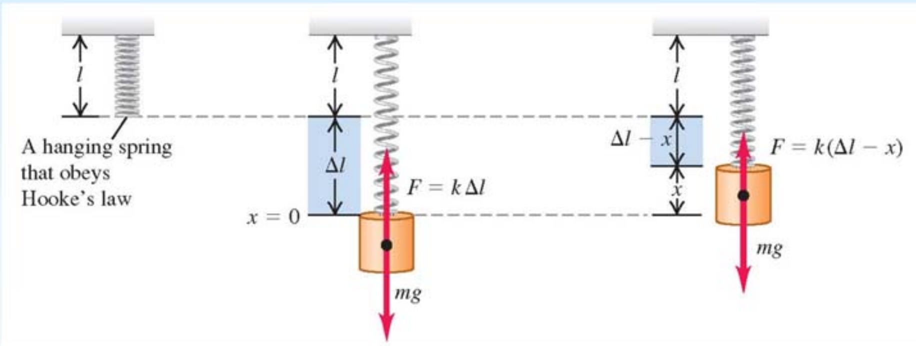
$$v_x = -(0.50\ \text{m/s})\sin[(20\ \text{rad/s})t - 0.93\ \text{rad}]$$

$$a_x = -(10\ \text{m/s}^2)\cos[(20\ \text{rad/s})t - 0.93\ \text{rad}]$$

Del 5. Vertikal svängning

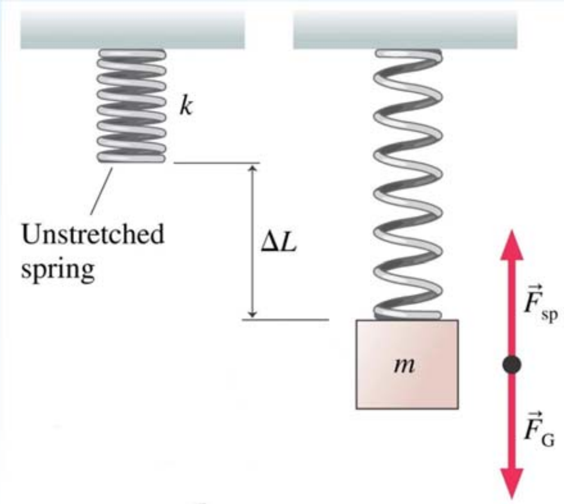


Vertikal svängning
Gravitationen drar ut fjädern till ett nytt jämviktsläge.



Harmonisk Svängning
Vertikal svängning

Utan svängningar: Hur mycket drages fjädern ut ?



$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{sp} - \vec{F}_G = k\Delta L - mg$$

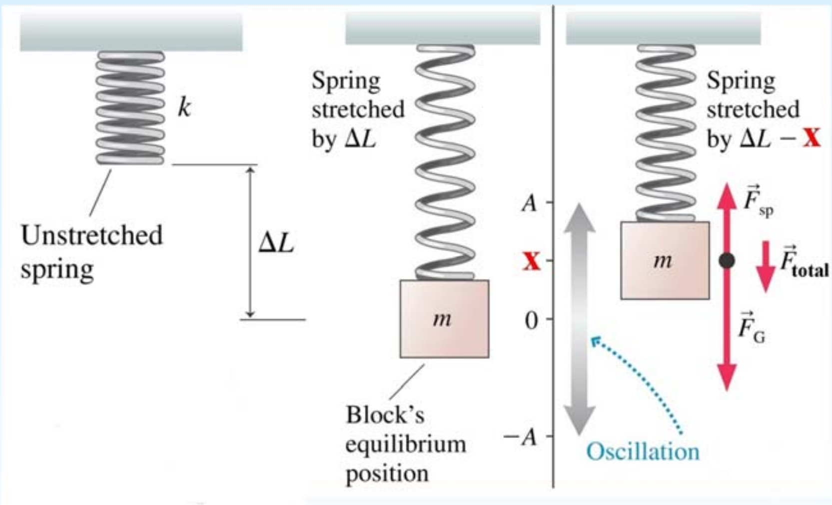
$$\vec{F}_{total} = m\vec{a} = 0$$

$$\boxed{\Delta L = \frac{mg}{k}}$$

Harmonisk Svängning
Vertikal svängning

Med svängningar:

Summera krafterna !



$$\boxed{\vec{F}_{total} = \vec{F}_{sp} - \vec{F}_G = k(\Delta L - x) - mg}$$

Harmonisk Svängning
Vertikal svängning

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{sp} - \vec{F}_G = k(\Delta L - x) - mg$$

$$\Delta L = \frac{mg}{\text{k}}$$

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{sp} - \vec{F}_G = -kx$$

Newton’s andra lag:

$$\vec{F}_{total} = m\vec{a} \neq 0$$

$$-kx = m\vec{a} = m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Denna differential ekvation har följande lösning:

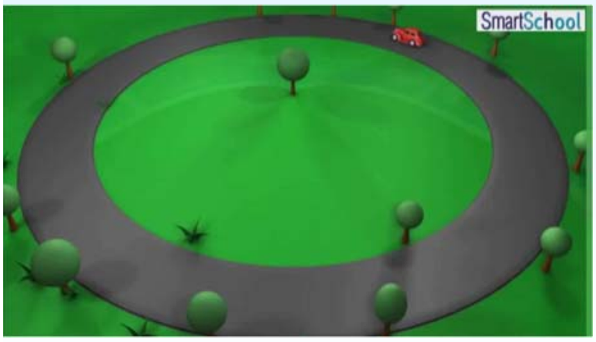
$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

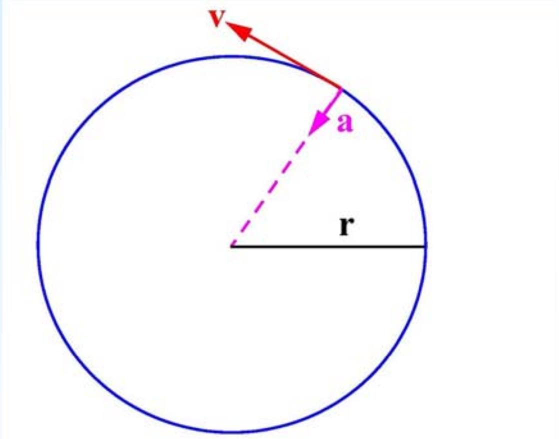
Harmonisk Svängning:
Cirkulär rörelse

Del 6. Cirkulär rörelse och harmonisk svängning

Harmonisk Svängning: Cirkulär rörelse

Beskrivning av circulär rörelse om hastigheten $|\bar{v}|$ är konstant





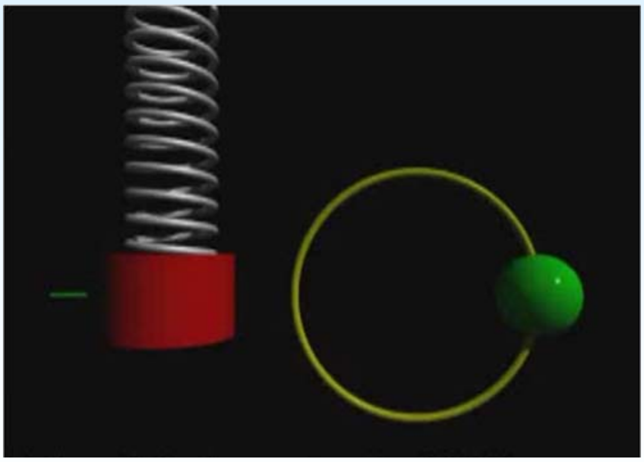
$$\text{Hastighet} = \frac{\text{avstånd}}{\text{tid}} = \frac{\text{omkrets}}{\text{period}}$$

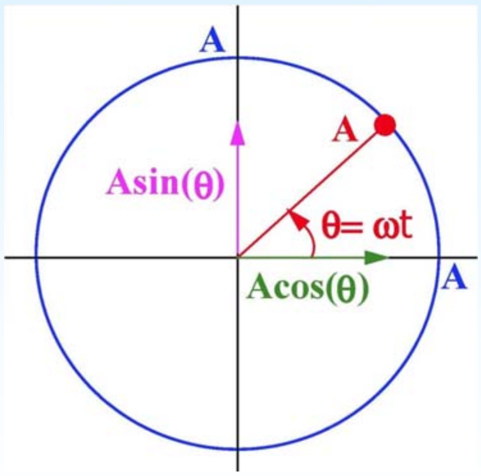
$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

$$\text{Acceleration:} \quad a = v^2/r = \omega^2 r$$

Harmonisk Svängning: Cirkulär rörelse

Både harmonisk svängning och cirkulär rörelse kan beskrivas av en sinus funktion.

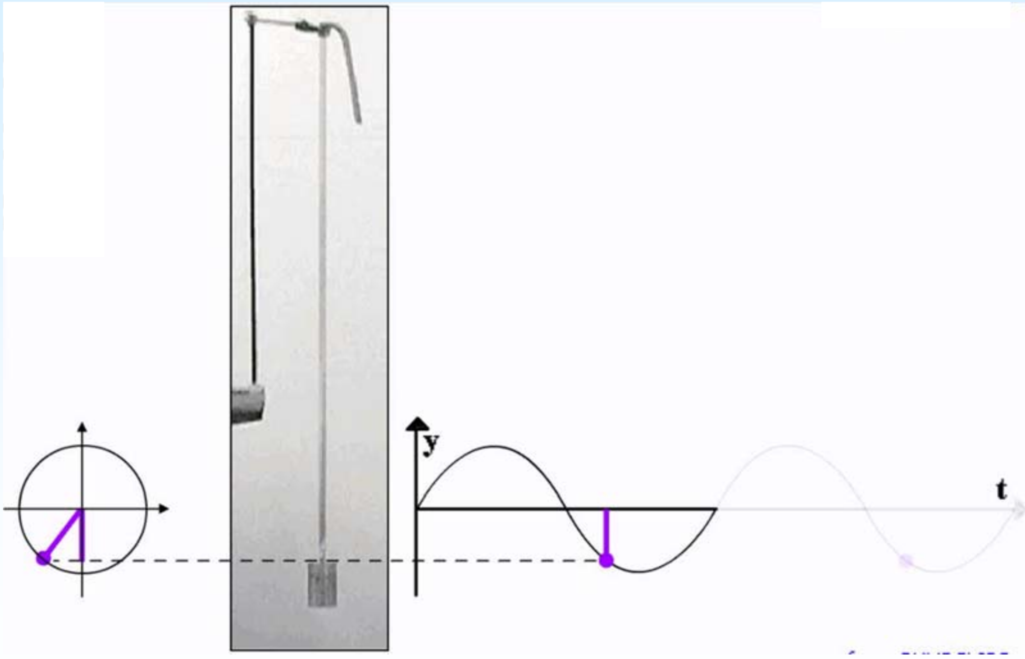




$\boxed{\theta = \omega t}$ Vinkeln ökar linjärt med tiden

https://www.youtube.com/watch?v=9r0HexjGRE4

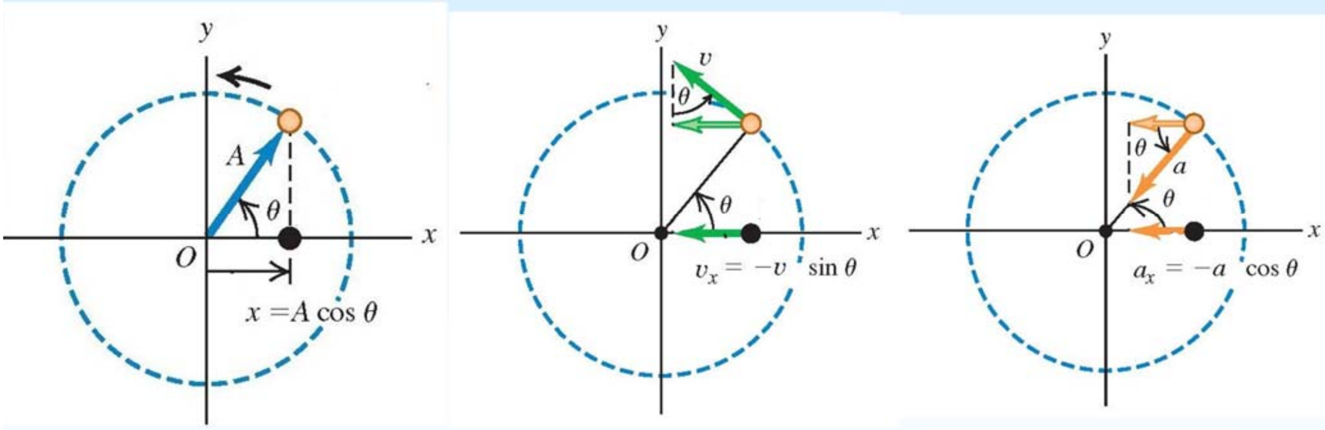
Harmonisk Svängning: Cirkulär rörelse



http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/flash/shm_spring1.swf

Harmonisk Svängning: Circulär rörelse

Vad blir x, v och a i x-riktningen ?



$x = A\cos\theta$ $\qquad v_x = -v \sin\theta$ $\qquad a_x = -a \cos\theta$

A = radius

$\boxed{\textbf{Totala Accelerationen:} \quad a = v^2/r = \omega^2 r \qquad a_x = -\omega^2 A\cos\theta}$

Harmonisk Svängning: Cirkulär rörelse

Kombinera

accelerationen från diskussionen om krafter

med

accelerationen för cirkulär rörelse

Harmonisk Svängning: Circulär rörelse

Krafter

F = m a
F = -k x

$a_x = -\frac{k}{m} x$

Circulär Rörelse

$$x = A\cos\theta$$

$$a_x = -\omega^2 A\cos\theta$$

$a_x = -\omega^2 x$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

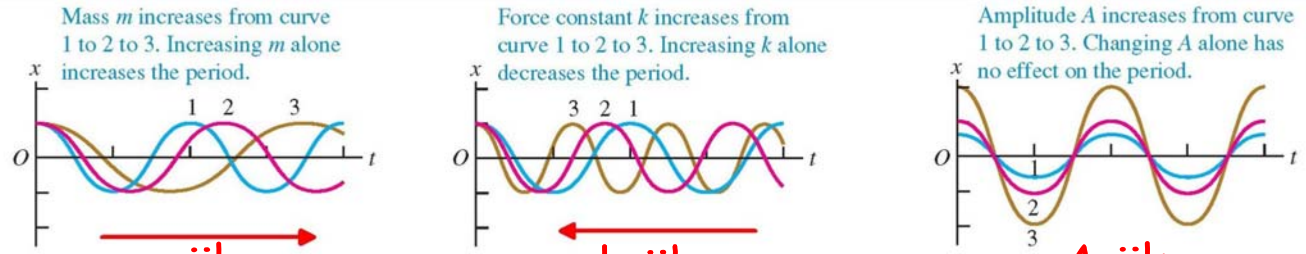
En harmonisk svängning kräver en motverkande kraft som är proportionell mot förflyttningen.

Harmonisk Svängning: Circulär rörelse

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(simple harmonic motion)}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(simple harmonic motion)}$$

Observera: f och T beror enbart på k och m.
Inte på amplituden !



m ökar k ökar A ökar

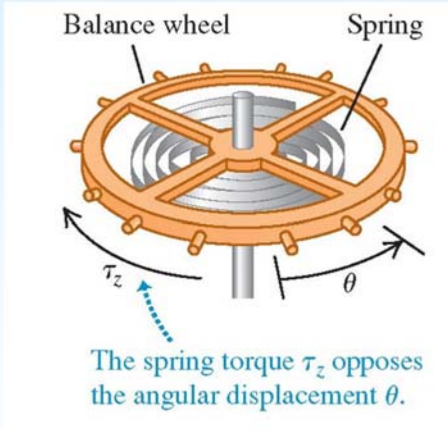
Harmonisk Svängning: Vinkel rörelse

Del 7. Harmonisk vinkelrörelse

The Henry Graves supercomplication
Värde: 206 miljoner kronor

Harmonisk Svängning: Vinkel rörelse

Fjädern i en klocka utför en harmonisk svängning.

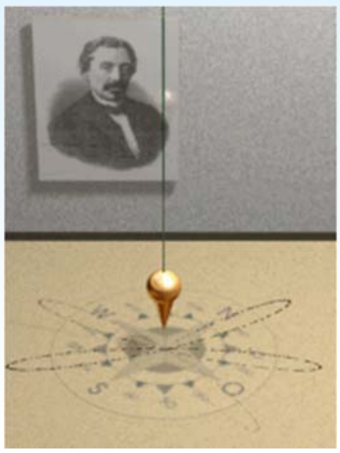


$$\boxed{\theta = \Theta \cos(\omega t + \phi)}$$

Harmonisk Svängning Pendeln

Del 8. Pendeln

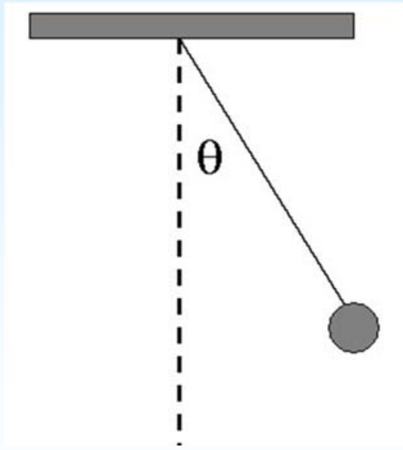
Foucaults pendel



Demonstrerar jordens rotation

Harmonisk Svängning
Pendeln

Pendeln utför harmoniska svängningar



$$\boxed{\theta = \Theta \cos(\omega t + \phi)}$$

Harmonisk Svängning
Rörelse ekvationer

Förflyttning: $x = A\sin(\omega t) \longrightarrow x_{max} = A$

Hastighet: $v = \frac{dx}{dt}$ $\quad v = \omega A\cos(\omega t) \longrightarrow v_{max} = \omega A$

Acceleration: $a = \frac{dv}{dt}$ $\quad a = -\omega^2 A\sin(\omega t) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$

Rörelse av en massa hängande i en fjäder.

$x = 0$ när $t = 0$

Förflyttning: $x = A\cos(\omega t) \longrightarrow x_{max} = A$

Hastighet: $v = \frac{dx}{dt}$ $\quad v = -\omega A\sin(\omega t) \longrightarrow v_{max} = \omega A$

Acceleration: $a = \frac{dv}{dt}$ $\quad a = -\omega^2 A\cos(\omega t) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$

Massa i circulär rörelse.

$x = A$ när $t = 0$

Förflyttning: $x = A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow x_{max} = A$

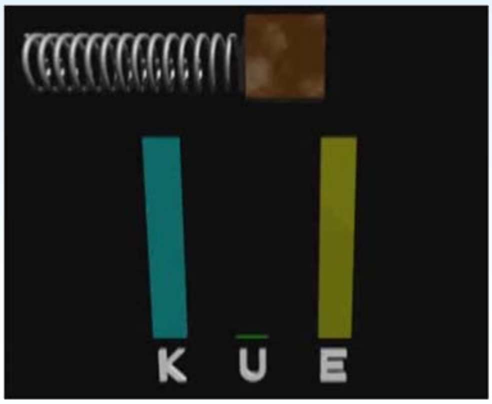
Hastighet: $v = \frac{dx}{dt}$ $\quad v = -\omega A\sin(\omega t+\phi) \longrightarrow v_{max} = \omega A$

Acceleration: $a = \frac{dv}{dt}$ $\quad a = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$

Harmonisk svängning
$x = A\cos(\phi)$ när $t = 0$
ϕ = fasvinkeln
(avgör läget vid $t = 0$)

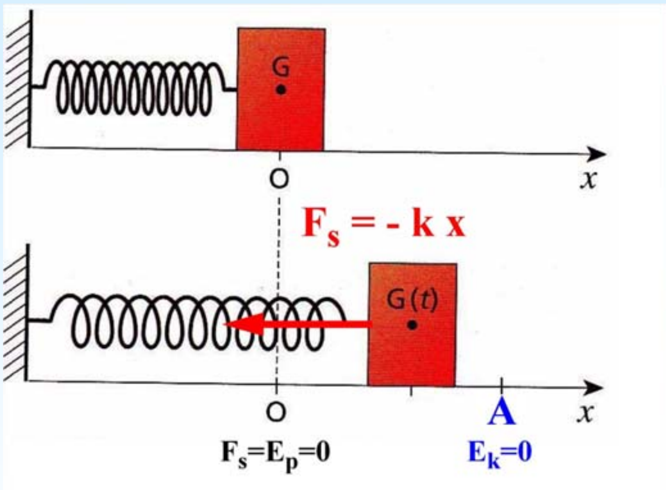
Harmonisk Svängning
Energi

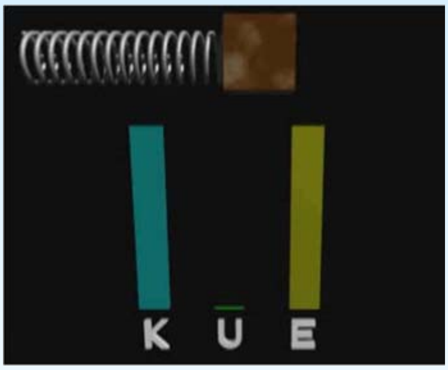
Del 9. Energi och harmoniska svängningar



https://www.youtube.com/watch?v=PL5g_IwrC5U

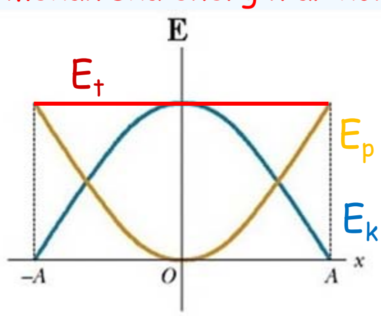
Harmonisk Svängning
Energi





Kinetisk energi:	$E_k = \frac{mv^2}{2}$	där $v = -\omega A \sin(\omega\ t)$
Potentiell energi:	$E_p = \frac{kx^2}{2}$	där $x = A\cos(\omega\ t)$
Total energi:	$E_t = E_k + E_p = \frac{kA^2}{2}$	(ty $E_k = 0$ för $x = A$)

Total mekaniska energin är konstant



Harmonisk Svängning
Energi

$x = A\cos(\omega t+\phi)$

$v = -\omega A\sin(\omega t+\phi)$

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

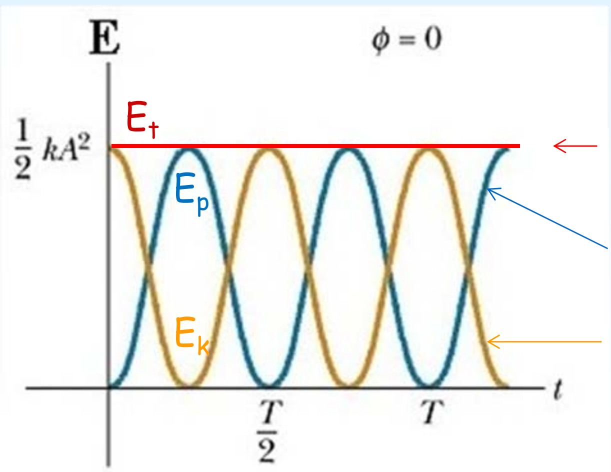
$$E_p = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\phi)$$

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\phi) = \tfrac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\phi)$$

$$E_t = E_p + E_k = \tfrac{1}{2}kA^2[\cos^2(\omega t+\phi) + \sin^2(\omega t+\phi)] = \tfrac{1}{2}kA^2$$

Harmonisk Svängning
Energi

Energins tidsberoende beskrivs av kvadraten av sinus funktioner



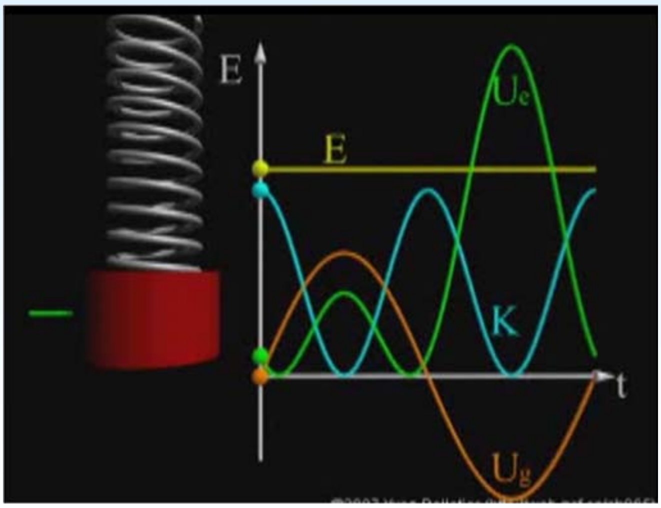
$$E_t = E_p + E_k = \tfrac{1}{2}kA^2$$

$$E_p = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\phi)$$

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\phi)$$

Harmonisk Svängning
Energi

Om svängningen är vertikal får man en potentiell energi också från gravitationen.



Ue: Elastisk potentiell energi

Ug: Potentiell energi pga gravitationen

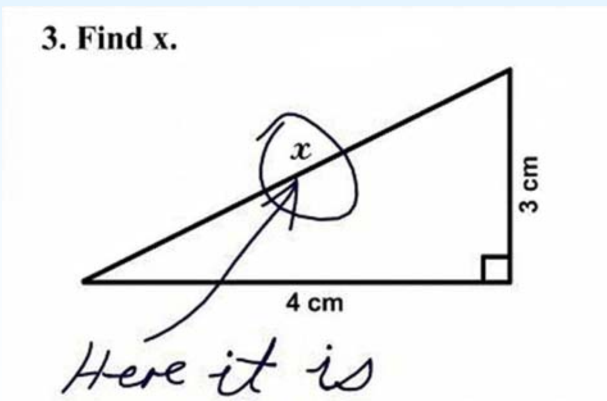
K: Kinetisk energi

E: Total mekanisk energi

https://www.youtube.com/watch?v=lIPWyY__N2A

Harmonisk Svängning
Problem

Del 10. Problem lösning

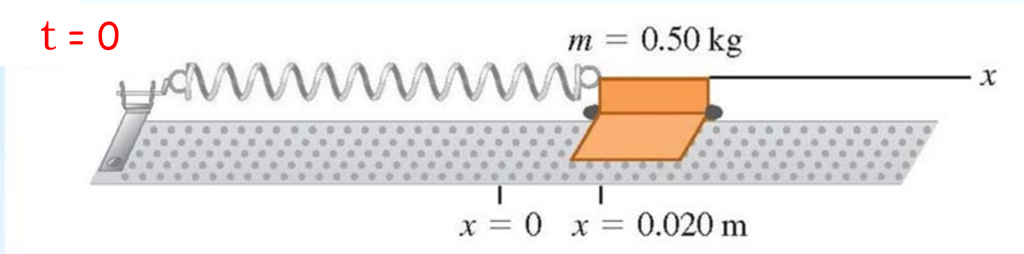


Harmonisk Svängning Problem

$A = 0.020$ m

$k = 200$ N/m

$m = 0.50$ kg



Vad är v_{max}, a_{max} och ω ?

$$x = A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow x_{max} = A$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\phi) \longrightarrow v_{max} = \omega A$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\ \text{kg/s}^2}{0.50\ \text{kg}}} = 20\ \text{rad/s}$$

$$v_{max} = 20 \cdot 0.020 = 0.40\ \text{m/s}$$

$$a_{max} = 20 \cdot 20 \cdot 0.020 = 8\ \text{m/s}^2$$

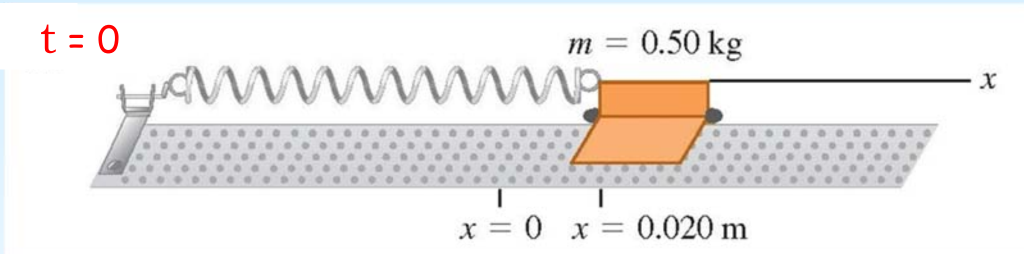
Harmonisk Svängning Problem

$A = 0.020$ m

$k = 200$ N/m

$m = 0.50$ kg

$\omega = 20$ rad/s



Vad är fas vinkeln ?

$$x = A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow x_{max} = A$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\phi) \longrightarrow v_{max} = \omega A$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$$

Getting the phase angle:

$x = A$ when $t = 0$

$A = A\cos(0 + \phi)$

$\phi = 0$

Harmonisk Svängning Problem

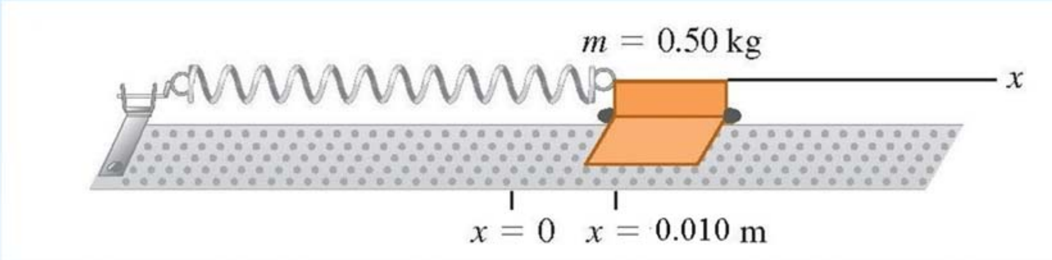
$A = 0.020$ m

$k = 200$ N/m

$m = 0.50$ kg

$\omega = 20$ rad/s

$\phi = 0$



Vad är v och a när x är halvvägs in från det maximala läget ?

$x = A\cos(\omega t) \longrightarrow x_{max} = A$

$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t) \longrightarrow v_{max} = \omega A$

$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$

$x = A/2$

$A/2 = A\cos(\omega t)$

$\omega t = 1.047$ rad

$v = -20 \cdot 0.020\sin(1.047) = -0.35$ m/s

$a = -20^2 \cdot 0.020\cos(1.047) = -4.0$ m/s^2

Harmonisk Svängning Problem

$A = 0.020$ m

$k = 200$ N/m

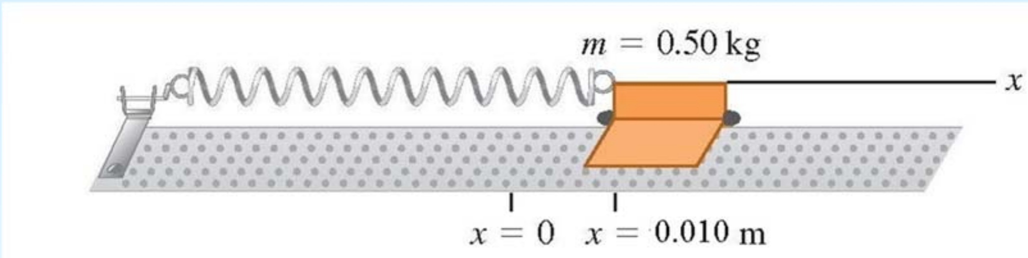
$m = 0.50$ kg

$\omega = 20$ rad/s

$\phi = 0$

$x = 0.010$ m

$v = -0.35$ m/s



Vad är den kinetiska, potentiella och totala energin ?

Kinetisk energi: $E_k = \frac{mv^2}{2}$ där $v = -\omega A\sin(\omega t)$

Potentiell energi: $E_p = \frac{kx^2}{2}$ där $x = A\cos(\omega t)$

Total energi: $E_t = E_k + E_p = \frac{kA^2}{2}$ (ty $E_k = 0$ för $x = A$)

$$Ep = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(200\ \text{N/m})(0.010\ \text{m})^2 = 0.010\ \text{J}$$

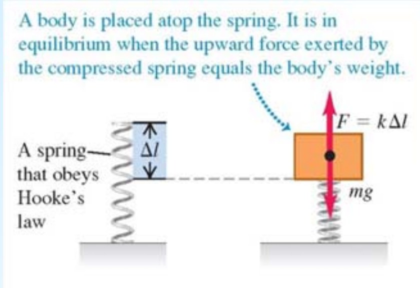
$$Ek = \tfrac{1}{2}mv_x^2 = \tfrac{1}{2}(0.50\ \text{kg})(-0.35\ \text{m/s})^2 = 0.030\ \text{J}$$

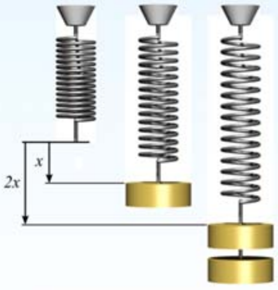
Harmonisk Svängning
Problem

Anta följande:

En bil med m = 1000 kg.
En förare med F = 980 N
orsakar att stötdämparna går ned med 2.8 cm.
Bilen kör över ett gupp och börjar svänga harmoniskt.

Vad blir perioden och frekvensen ?





Hooke's law for a spring

$$F = -kX$$

$$k = -\frac{F_x}{x} = -\frac{980 \text{ N}}{-0.028 \text{ m}} = 3.5 \times 10^4 \text{ kg/s}^2$$

The person's mass is $w/g = (980 \text{ N})/(9.8 \text{ m/s}^2) = 100$ kg. The *total* oscillating mass is $m = 1000 \text{ kg} + 100 \text{ kg} = 1100$ kg. The period T is

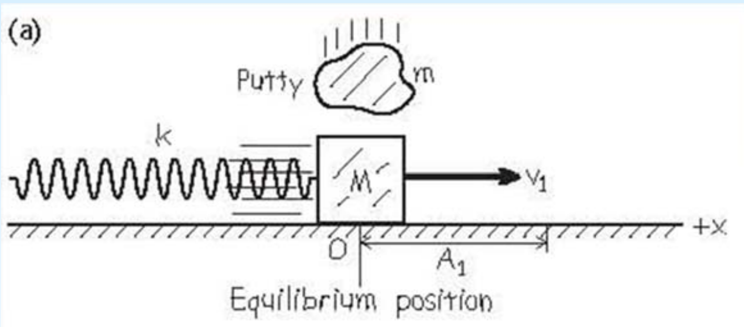
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1100 \text{ kg}}{3.5 \times 10^4 \text{ kg/s}^2}} = 1.11 \text{ s}$$

The frequency is $f = 1/T = 1/(1.11 \text{ s}) = 0.90$ Hz.

Harmonisk Svängning
Problem

En klump lera med massan m fastnar på en svängande massa M vid jämviktsläget.

Beräkna ny period och amplitud om v_1 är känd !



$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Den nya perioden T_2:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

Harmonisk Svängning Problem

Konserveringslagar: Energin och rörelsemängden (P=mv) är bevarade

Steg 1. Rörelsemängdens bevarande ger v_2: $P_1 = P_2$, $Mv_1 = (M+m)v_2$ $\Rightarrow$ $v_2 = v_1 \frac{M}{M+m}$

Steg 2. Den nya totala energin vid x = 0: $E_{t2} = E_{k2} + 0 = \frac{1}{2}(M+m)v_2^2 = \frac{1}{2}v_1^2\frac{M^2}{M+m}$

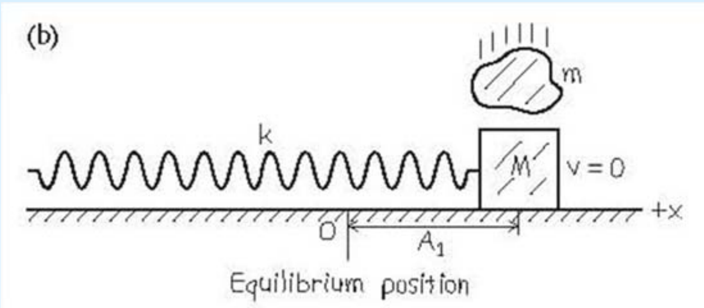
Steg 3. Den nya totala energin vid x = A_2: $E_{t2} = 0 + E_{p2} = \frac{1}{2}kA_2^2$

Steg 4. Energins bevarande ger A_2: $\frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}v_1^2\frac{M^2}{M+m}$ $\Rightarrow$ $A_2 = v_1 \frac{M}{\sqrt{(M+m)k}}$

Harmonisk Svängning Problem

En klump lera fastnar på en svängande massa M vid maximal läget.

Beräkna ny period och amplitud !

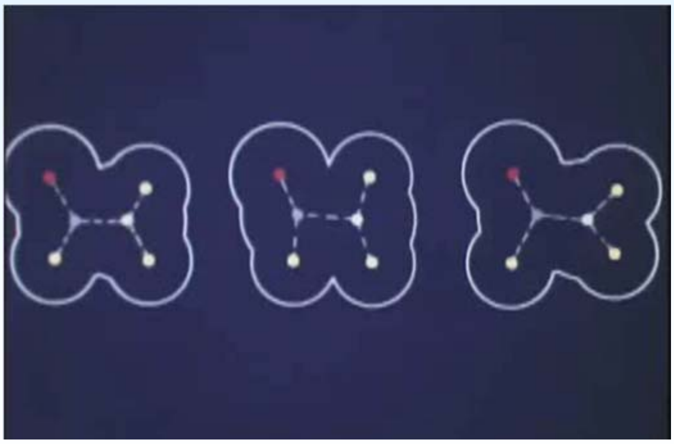


$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

För x = A är den kinetiska energin = 0: $E_{t1} = 0 + E_{p1} = \frac{1}{2}kA_1^2$, $E_{t2} = 0 + E_{p2} = \frac{1}{2}kA_2^2$

Den totala energin är bevarad: $A_1 = A_2$

Del 11. Molekylers vibration



https://www.youtube.com/watch?v=3RqEIr8NtMI

Matematik: Binomialteoremet

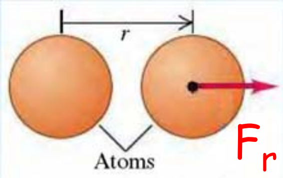
$$\boxed{(1+u)^n = 1 + nu} + \frac{n(n-1)}{2!}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^3 + \cdots$$

Om u är litet kan början av serien användas som approximation:

$$(1+0.001)^{13} = 1.013078......$$

$$(1+0.001)^{13} \approx 1 + 13 \cdot 0.001 = 1.013$$

Harmonisk Svängning
Molekyler

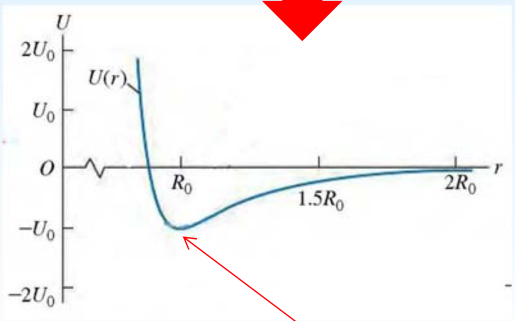


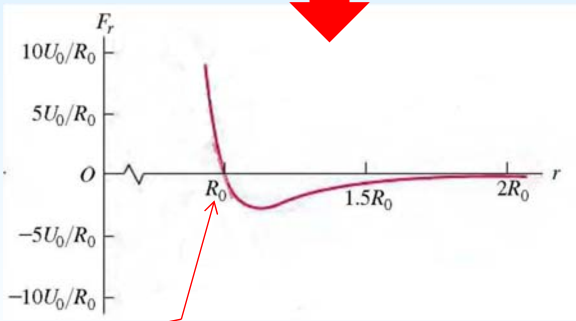
Potentiell energi (U)

$$U = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^{6}\right]$$

Kraften mellan två atomer (F_r)

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = U_0\left[\frac{12R_0^{12}}{r^{13}} - 2\frac{6R_0^{6}}{r^{7}}\right] = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r}\right)^{7}\right]$$





Jämviktsläget är vid $r = R_0$ för då är U minimum och F = 0

Avståndet från jämviktsläget är $x = r - R_0$

Harmonisk Svängning
Molekyler

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = U_0\left[\frac{12R_0^{12}}{r^{13}} - 2\frac{6R_0^{6}}{r^{7}}\right] = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r}\right)^{7}\right]$$

$$x = r - R_0$$

$$F_r = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^{7}\right]$$

$$= 12\frac{U_0}{R_0}\left[\frac{1}{(1+x/R_0)^{13}} - \frac{1}{(1+x/R_0)^{7}}\right]$$

Anta att vibrationerna är små så att x/R_0 är litet!

Då kan man använda Binomialteoremet:

$$\frac{1}{(1+x/R_0)^{13}} = (1+x/R_0)^{-13} \approx 1 + (-13)\frac{x}{R_0}$$

$$\frac{1}{(1+x/R_0)^{7}} = (1+x/R_0)^{-7} \approx 1 + (-7)\frac{x}{R_0}$$

$$\boxed{F_r \approx} 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(1 + (-13)\frac{x}{R_0}\right) - \left(1 + (-7)\frac{x}{R_0}\right)\right] = \boxed{-\left(\frac{72U_0}{R_0^2}\right)x}$$

This is just Hooke's law, with force constant $k = 72U_0/R_0^2$