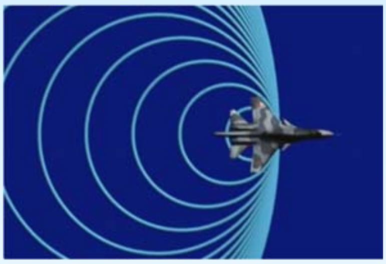
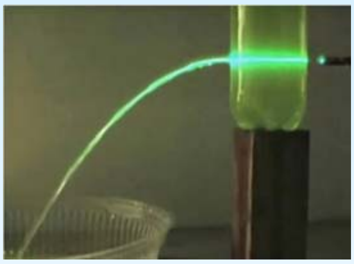
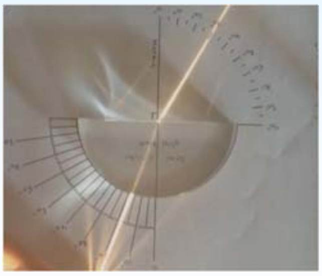
Vågrörelselära och optik

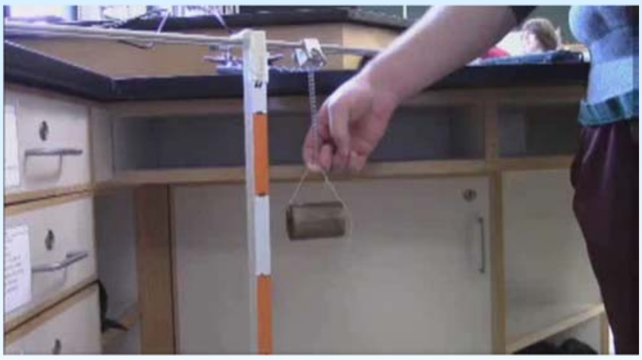


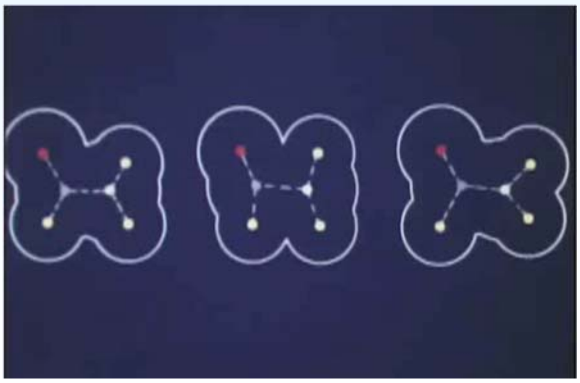
Kapitel 14 – Harmonisk oscillator

Harmonisk Svängning

Del 1. Vad är harmonisk svängning och hur kan den beskrivas matematiskt ?

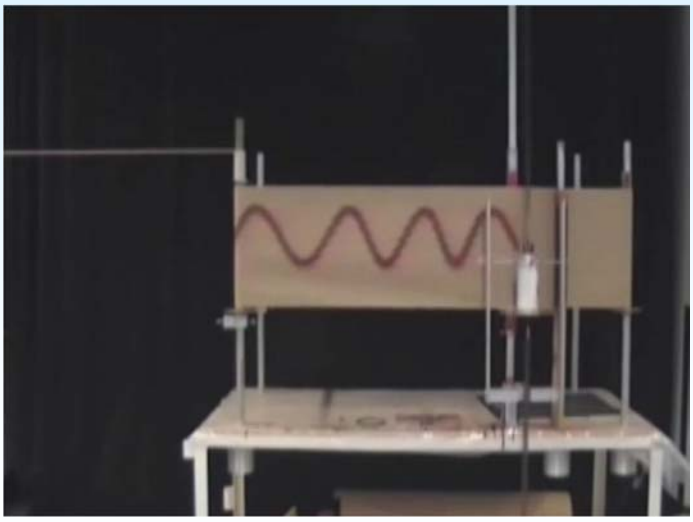
Harmonisk Svängning
Exempel





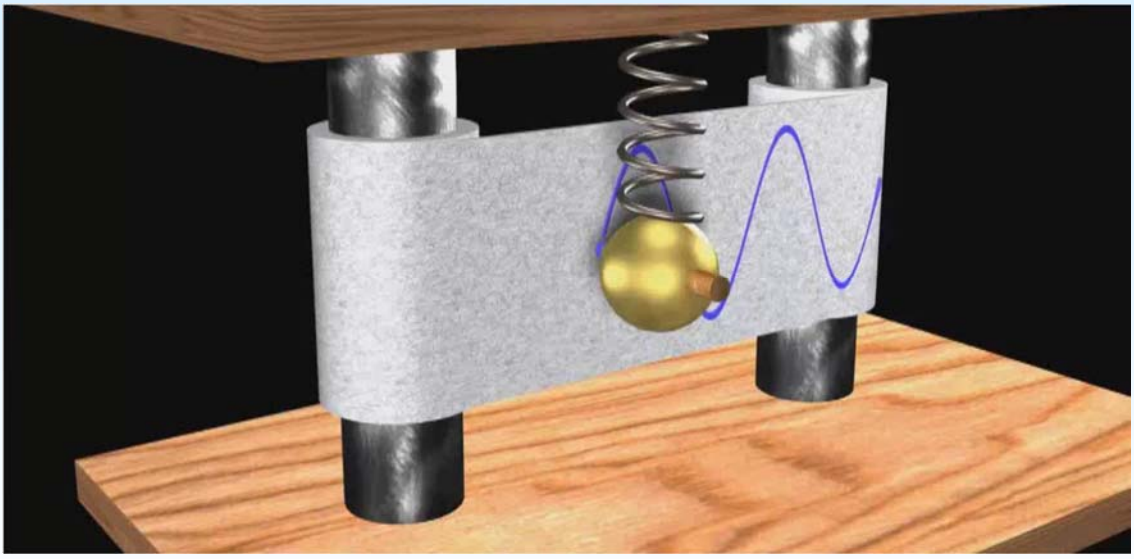
Harmonisk Svängning
Experiment

Ett experiment som hjälper oss att hitta en matematisk beskrivning av harmonisk svängning:



https://www.youtube.com/watch?v=p9uhmjbZn-c

Harmonisk Svängning
Experiment

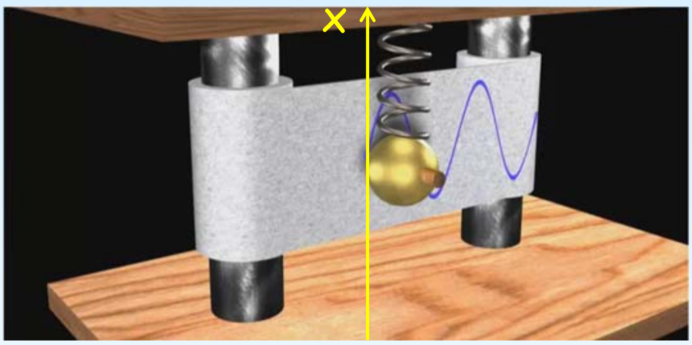


Slutsats: Harmonisk svängning kan beskrivas av funktionen

$x = A \sin(Bt + C)$

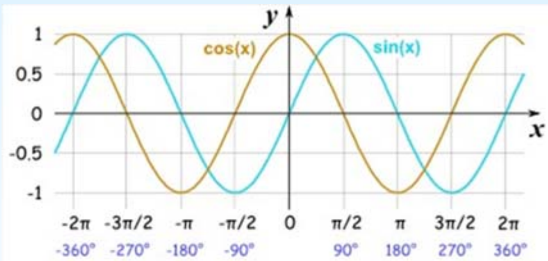
om t är tiden och A, B och C är konstanter som beskriver rörelsen.

Harmonisk Svängning
Funktionen



$x = A \sin(Bt + C)$ eller

$x = A \cos(Bt + C - \pi/2)$



x : Vertikal förflyttning. Enhet: meter

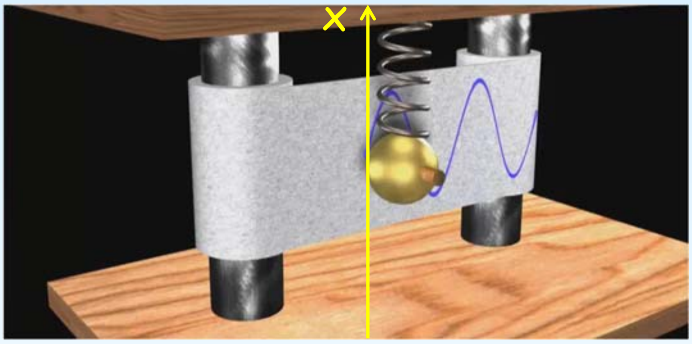
t : Tid. Enhet: sekund

A : Amplitud (maximal förflyttning). Enhet: meter

$B = \omega$: Vinkel frekvens (antal svängningar per sekund gånger 2π).
Enhet: Radianer per sekund

$C = \phi$: Fasvinkel (bestämmer läget vid tiden = 0). Enhet: radianer

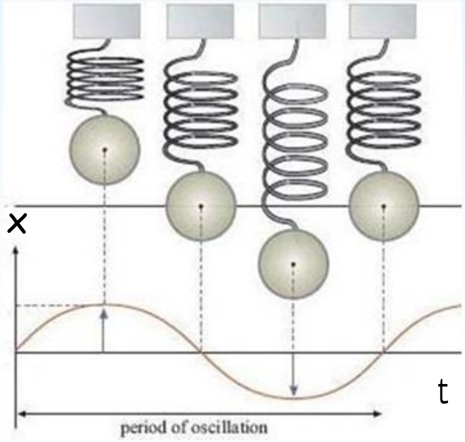
Harmonisk Svängning
f och T



$x = A \sin(\omega t + \phi')$

eller

$x = A \cos(\omega t + \phi)$



T: Period = tiden det tar för massan att åka upp och ner. Enhet: sekund

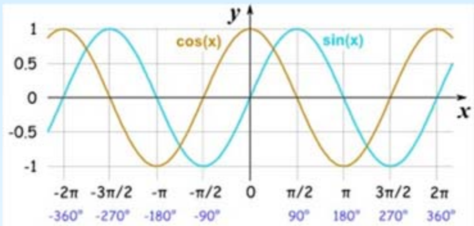
f: Frekvens = Antalet perioder per sekund.
Enhet: 1/sekund = Hz

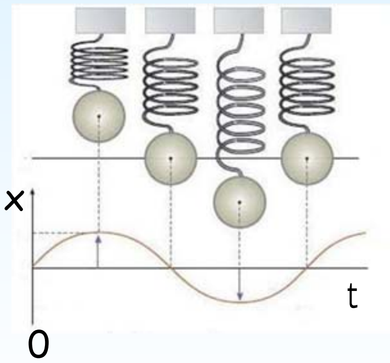
$f = 1 / T$ $\qquad$ $\omega = 2\pi f$

Harmonisk Svängning
fasvinkel

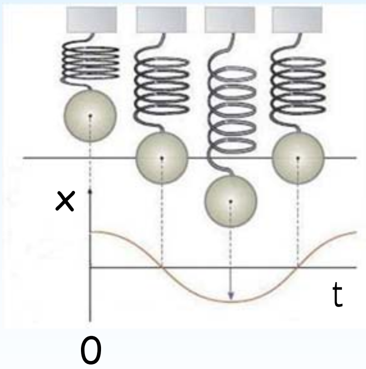
$x = A \sin(\omega t + \phi')$ eller $x = A \cos(\omega t + \phi)$

Fasvinkeln (ϕ) bestämmer läget vid tiden = 0.
För då gäller: $x = A\sin(\phi')$ eller $x = A\cos(\phi)$

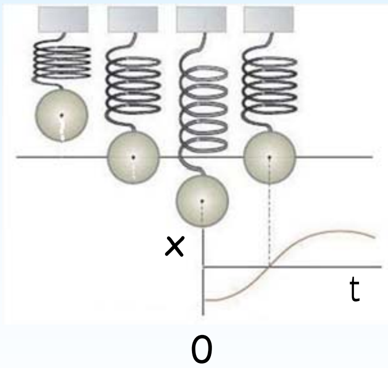




$X = A \sin(\omega t)$
$X = A \cos(\omega t - \pi/2)$



$X = A \cos(\omega t)$
$X = A \sin(\omega t + \pi/2)$



$X = A \cos(\omega t + \pi)$
$X = A \sin(\omega t - \pi/2)$

Harmonisk Svängning
v och a

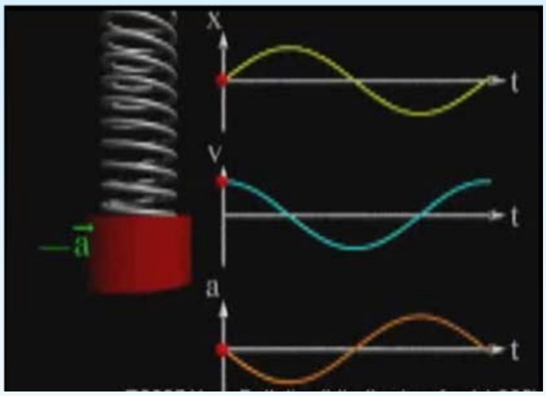
Vi har nu en matematisk beskrivning av läget
(den vertikala förflyttningen).

Vad är hastigheten och accelerationen ?

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

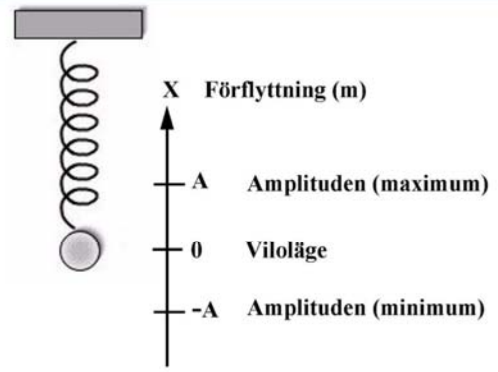
Harmonisk Svängning
v och a

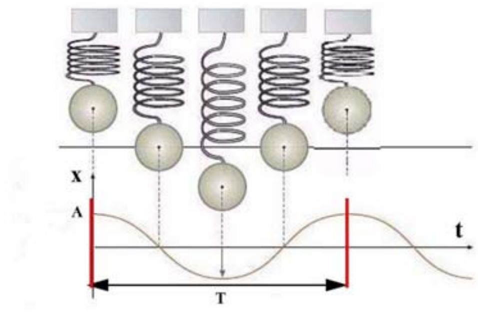


Förflyttning:		$x = A\sin(\omega t)$	$\longrightarrow$	$x_{max} = A$
Hastighet:	$v = \frac{dx}{dt}$	$v = \omega A\cos(\omega t)$	$\longrightarrow$	$v_{max} = \omega A$
Acceleration:	$a = \frac{dv}{dt}$	$a = -\omega^2 A\sin(\omega t)$	$\longrightarrow$	$a_{max} = \omega^2 A$

https://www.youtube.com/watch?v=eeYRkW8V7Vg

Harmonisk Svängning
Sammanfattning





$\phi = \mathrm{acos}(x_0 / A) = \mathrm{acos}(A/A) = 0$

- x Förflyttning (m)
- A Amplitud (m)
- t Tid (s)
- T Period (s)
- f Frekvens (Hz) $= 1/T$
- ω Vinkelfrekvens (rad/s) $= 2\pi / T = 2\pi f$
- ϕ Fasvinkel (rad) $= \mathrm{acos}(x_0 / A)$

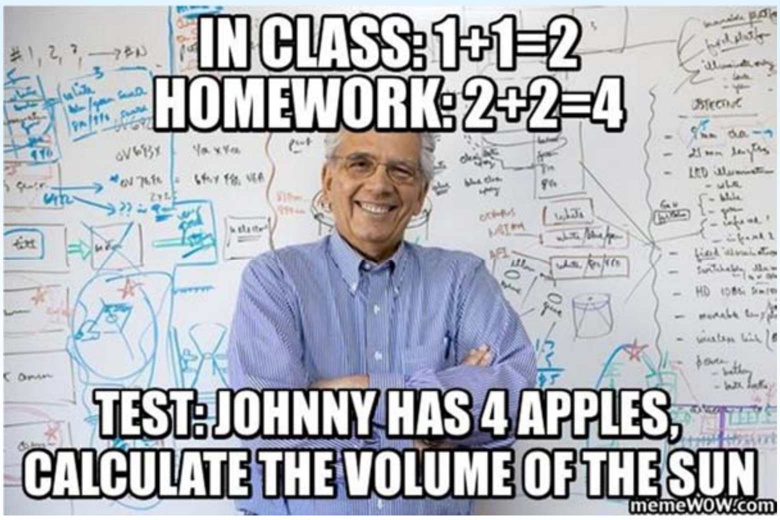
$$x = A\cos(\omega t + \phi) \longrightarrow x_{max} = A$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \longrightarrow v_{max} = \omega A$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$$

Harmonisk Svängning
Problem

Del 2. Problem lösning



Harmonisk Svängning
Problem

En ultraljuds apparat använder ljud med frekvensen
6.7×10^6 Hz.

Hur lång tid tar varje svängning och vilken
vinkelfrekvens motsvarar detta ?

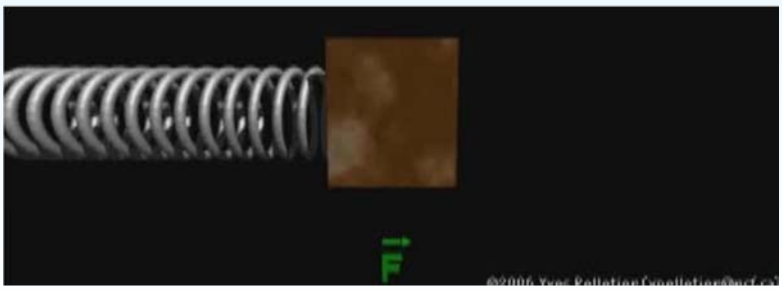
$$\boxed{\begin{gathered} f = 1/T \\ \omega = 2\pi f \end{gathered}}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6.7 \times 10^6\ \mathrm{Hz}} = 1.5 \times 10^{-7}\ \mathrm{s} = 0.15\ \mu\mathrm{s}$$

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f = 2\pi(6.7 \times 10^6\ \mathrm{Hz}) \\ &= (2\pi\ \mathrm{rad/cycle})(6.7 \times 10^6\ \mathrm{cycle/s}) \\ &= 4.2 \times 10^7\ \mathrm{rad/s} \end{aligned}$$

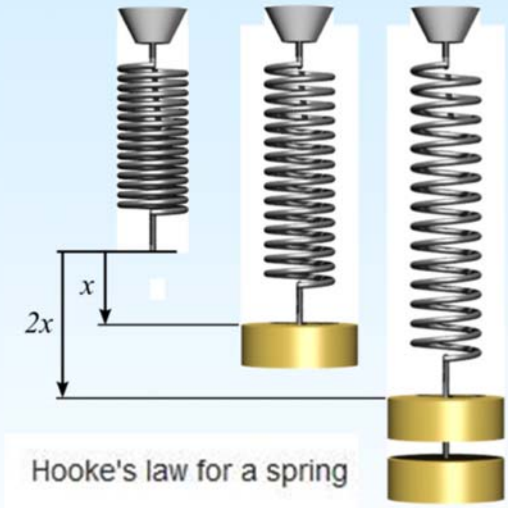
Harmonisk Svängning
Fjädern & Krafter

Del 3. Fjädrar, Hookes lag & Krafter



https://www.youtube.com/watch?v=_ca77OYbeZw

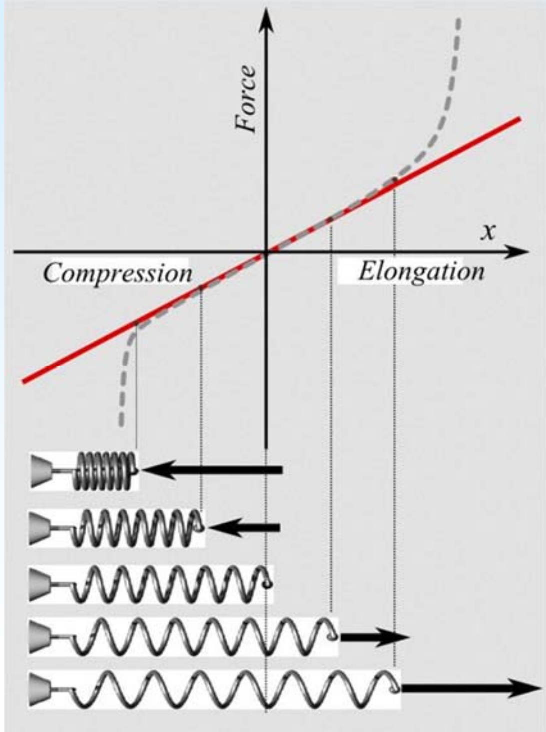
Harmonisk Svängning
Fjädern



Hooke's law for a spring

$$F = -kX$$

k = fjäderkonstanten
beskriver hur styv fjädern är



Harmonisk Svängning
Krafter

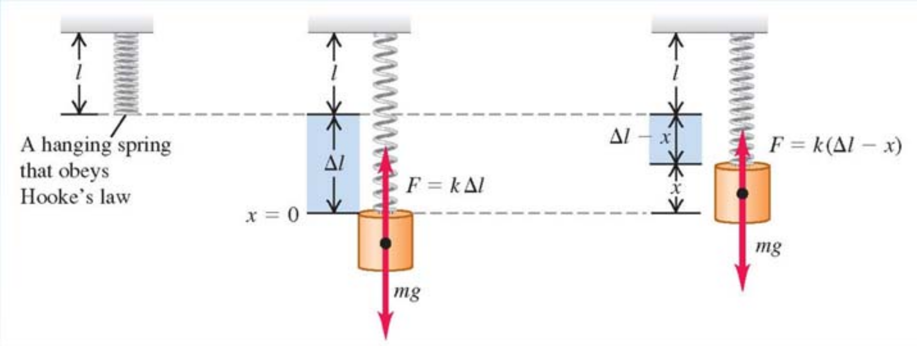
Newton's first law of motion: A body acted on by no net force moves with constant velocity (which may be zero) and zero acceleration.

Newton's second law of motion: If a net external force acts on a body, the body accelerates. The direction of acceleration is the same as the direction of the net force. The mass of the body times the acceleration of the body equals the net force vector.

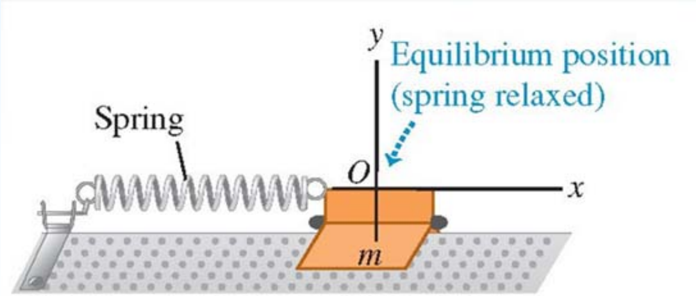
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{(Newton's second law of motion)}$$

Harmonisk Svängning med fjäder

Vertikal svängning
Gravitationen drar ut fjädern till ett nytt jämviktsläge.



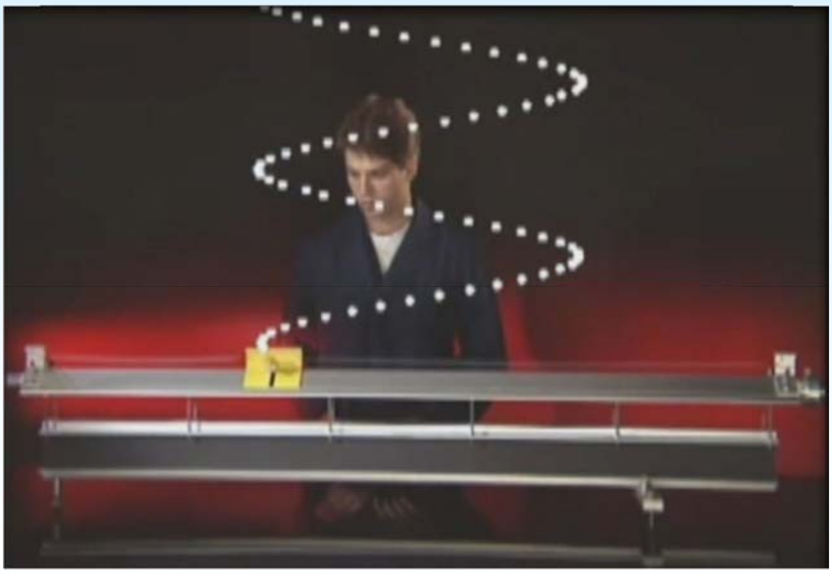
Horisontell svängning
Detta är inte fallet om fjädern är horisontell.



Svängningarna blir emellertid de samma !

Harmonisk Svängning med fjäder

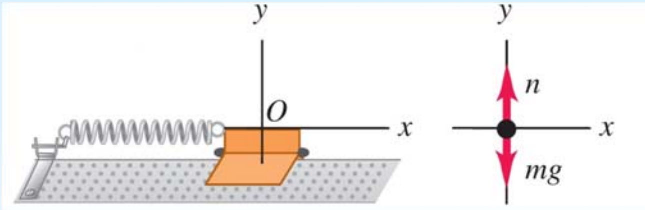
Horisontell svängning på en luftkudde



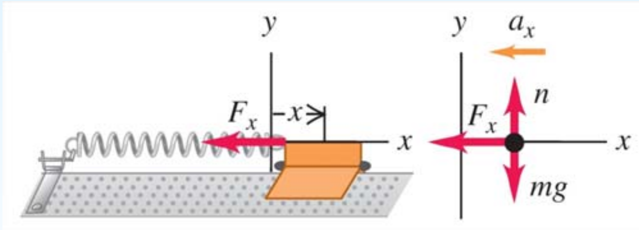
https://www.youtube.com/watch?v=9nLedU7qvvw

Harmonisk Svängning
Krafter

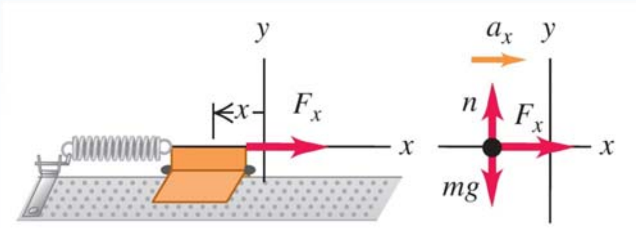
$x = 0 \quad F_{total} = 0 \quad a_x = 0$



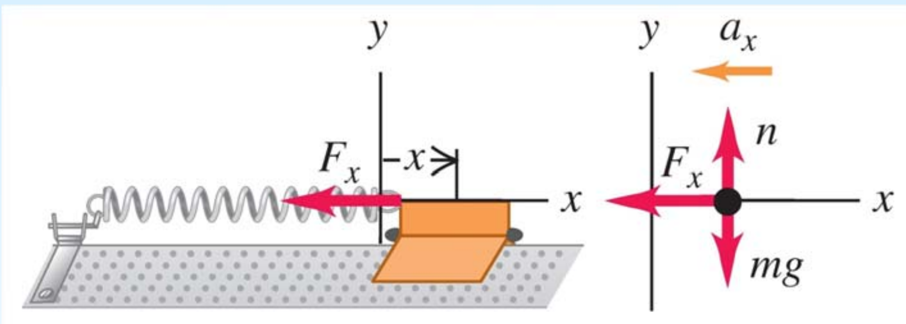
$x > 0 \quad F_{total} < 0 \quad a_x < 0$



$x < 0 \quad F_{total} > 0 \quad a_x > 0$



Harmonisk Svängning
Krafter



$F_x = -kx$ (restoring force exerted by an ideal spring)

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ (Newton's second law of motion)

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad \text{(simple harmonic motion)}$$

Harmonisk Svängning
Krafter

Gamla formler:

$$x = A\cos(\omega t+\phi)$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t+\phi)$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi)$$

$$a_x = -\omega^2 x$$

Ny formel:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad \text{(simple harmonic motion)}$$

Kombinera gammalt med nytt:

$$-\omega^2 x = -\frac{k}{m}x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Frekvensen beror av två saker:

1. Fjäderkonstanten
2. Massan

Harmonisk Svängning
Krafter

Man kan se på svängningarna på ett annat sätt:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad \text{(simple harmonic motion)}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Detta är en differential ekvation som har lösningen:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$-\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{k}{m}A\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$-\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) + \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

Harmonisk Svängning med fjäder

Öka massan

Öka fjäderkontanten

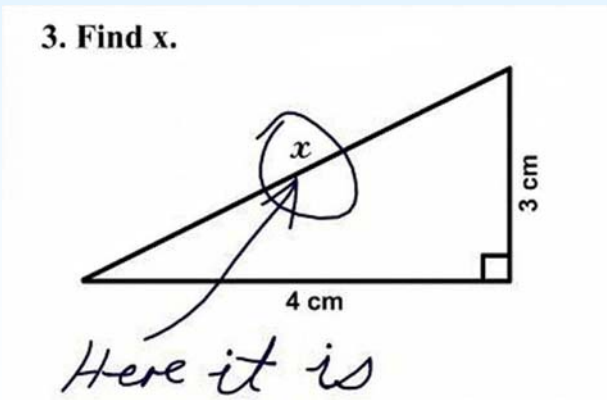
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Frekvensen minskar

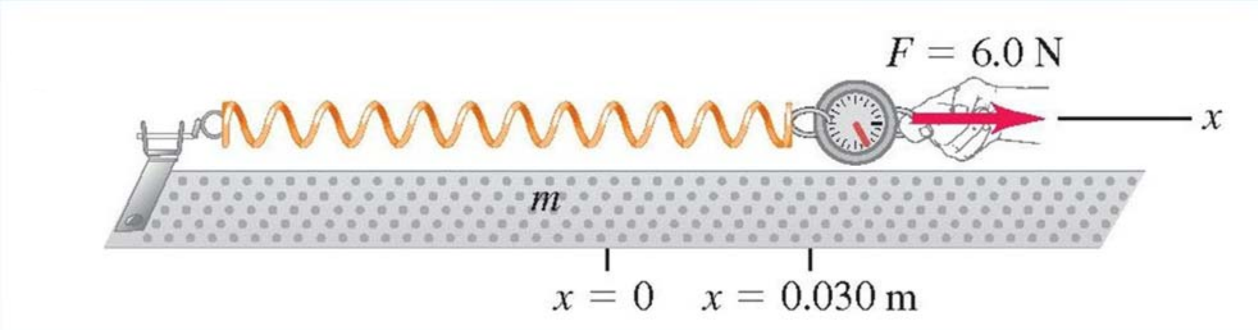
Frekvensen ökar

Harmonisk Svängning Problem

Del 4. Problem lösning



Harmonisk Svängning
Problem



Vad är fjäderkonstanten ?

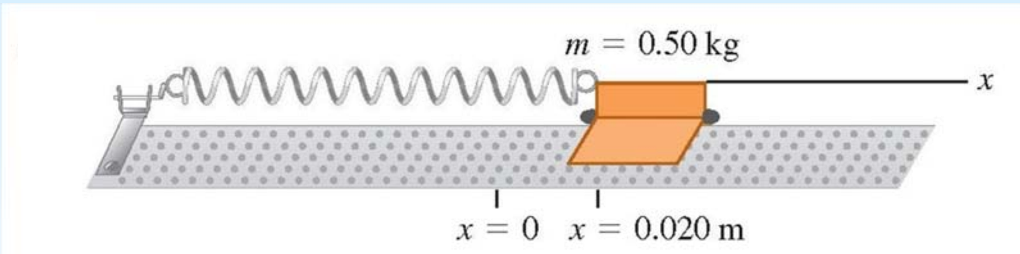
Hooke's law for a spring

$$\boxed{F = -kX}$$

$$k = -\frac{F_x}{x} = -\frac{-6.0\ \mathrm{N}}{0.030\ \mathrm{m}} = 200\ \mathrm{N/m} = 200\ \mathrm{kg/s^2}$$

Harmonisk Svängning
Problem

$k = 200\ \mathrm{kg/s^2}$



Massan drages tillbaka 2 cm och släpps.

Vad blir vinkelfrekvensen, frekvensen och perioden av svängningarna ?

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} = \sqrt{\frac{200\ \mathrm{kg/s^2}}{0.50\ \mathrm{kg}}} = 20\ \mathrm{rad/s}$$

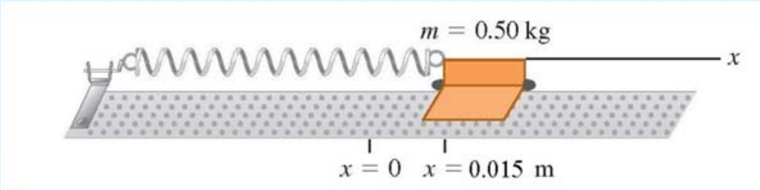
$$\boxed{\omega = 2\pi f} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20\ \mathrm{rad/s}}{2\pi\ \mathrm{rad/cycle}} = 3.2\ \mathrm{cycle/s} = 3.2\ \mathrm{Hz}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{f}} = \frac{1}{3.2\ \mathrm{cycle/s}} = 0.31\ \mathrm{s}$$

Harmonisk Svängning Problem

$k = 200\ kg/s^2$

$\omega = 20\ rad/s$



t = 0

$x_0 = 0.015\ m$

$v_0 = +0.40\ m/s$

Vad är amplituden och fasvinkeln ?

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\phi)} \longrightarrow x_{max} = A$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\phi) \longrightarrow v_{max} = \omega A$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$$

t = 0

$$x_0 = A\cos\phi$$

$$v_{0x} = -\omega A\sin\phi$$

$$\frac{v_{0x}}{x_0} = \frac{-\omega A\sin\phi}{A\cos\phi} = -\omega\tan\phi$$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right) = \arctan\left(-\frac{0.40\ \text{m/s}}{(20\ \text{rad/s})(0.015\ \text{m})}\right) = -53^\circ = -0.93\ \text{rad}$$

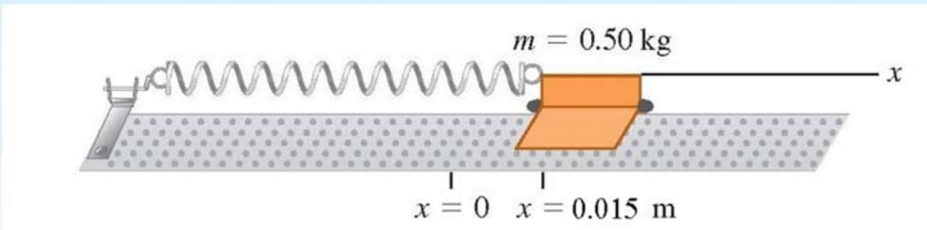
$$A = x_0 / \cos\phi = 0.015 / \cos(-0.93) = 0.025\ \text{m}$$

Harmonisk Svängning Problem

$\omega = 20\ rad/s$

$\phi = -0.93\ rad$

$A = 0.025\ m$



Vad är ekvationerna för läget, hastigheten och accelerationen ?

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\phi)} \longrightarrow x_{max} = A$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\phi) \longrightarrow v_{max} = \omega A$$

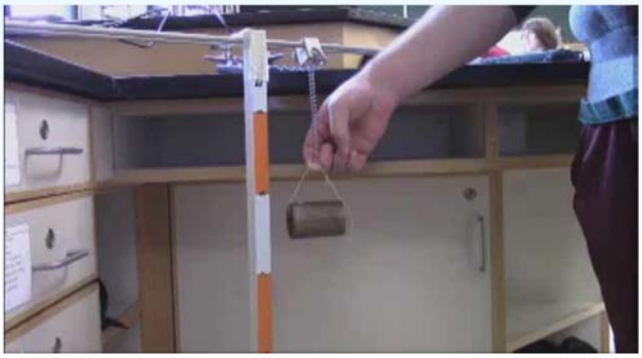
$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$$

$$x = (0.025\ \text{m})\cos[(20\ \text{rad/s})t - 0.93\ \text{rad}]$$

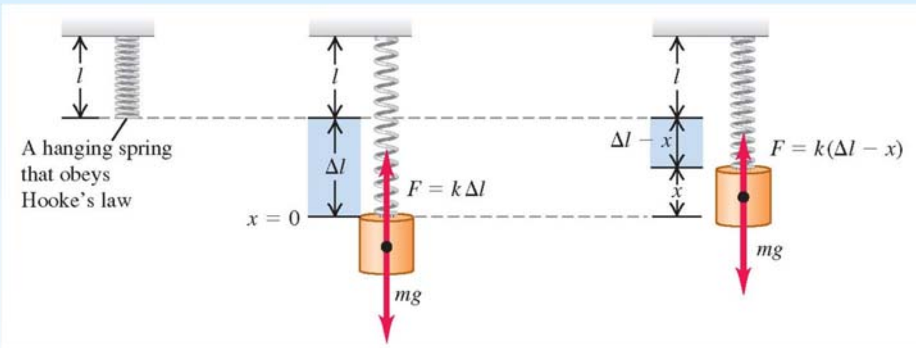
$$v_x = -(0.50\ \text{m/s})\sin[(20\ \text{rad/s})t - 0.93\ \text{rad}]$$

$$a_x = -(10\ \text{m/s}^2)\cos[(20\ \text{rad/s})t - 0.93\ \text{rad}]$$

Del 5. Vertikal svängning

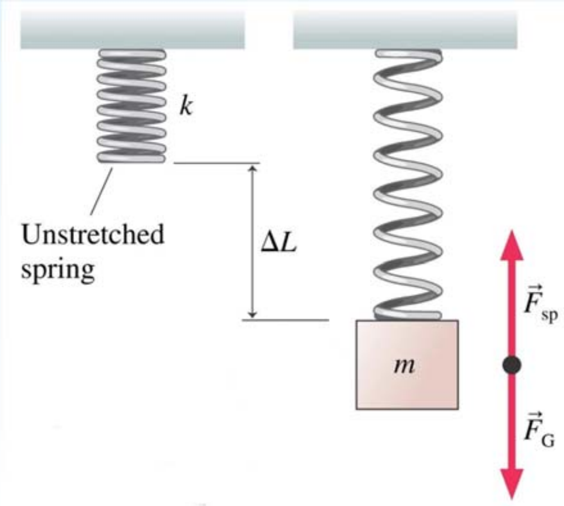


Vertikal svängning
Gravitationen drar ut fjädern till ett nytt jämviktsläge.



Harmonisk Svängning
Vertikal svängning

Utan svängningar: Hur mycket drages fjädern ut ?



$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{sp} - \vec{F}_G = k\Delta L - mg$$

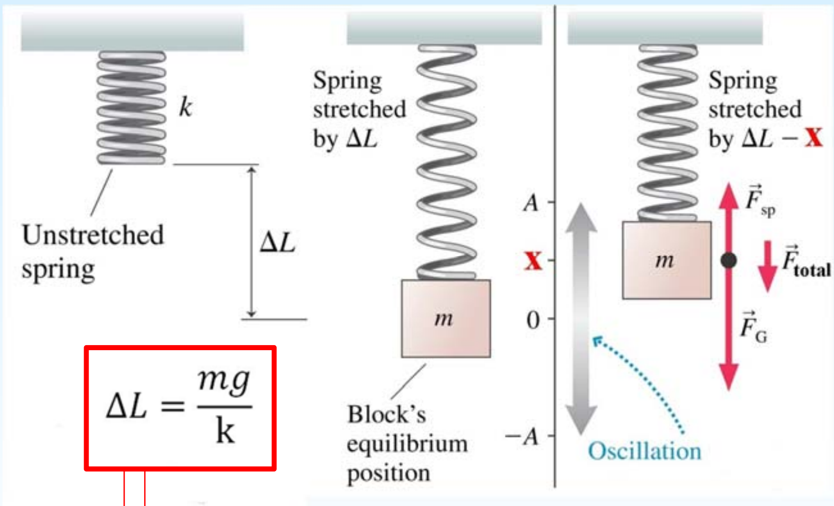
$$\vec{F}_{total} = m\vec{a} = 0$$

$$\boxed{\Delta L = \frac{mg}{\text{k}}}$$

Harmonisk Svängning
Vertikal svängning

Med svängningar:

Summera krafterna !



$$\boxed{\Delta L = \frac{mg}{\text{k}}}$$

$$\boxed{\vec{F}_{total} = \vec{F}_{sp} - \vec{F}_G = k(\Delta L - x) - mg \quad = -kx}$$

Harmonisk Svängning
Vertikal svängning

Hookes lag:

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{sp} - \vec{F}_G = -kx$$

Newtons lag:

$$\vec{F}_{total} = m\vec{a} \neq 0$$

$$-kx = m\vec{a} = m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Denna differential ekvation har följande lösning:

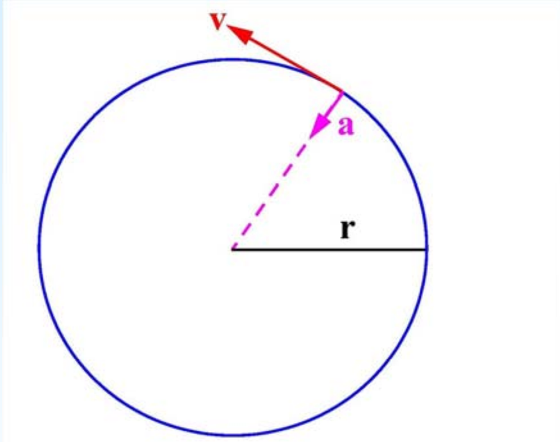
$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

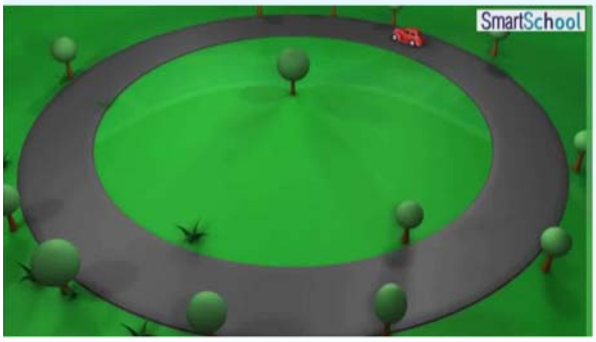
Harmonisk Svängning:
Cirkulär rörelse

Del 6. Cirkulär rörelse och harmonisk svängning


Harmonisk Svängning: Cirkulär rörelse

Beskrivning av
circulär rörelse
om hastigheten
$|\bar{v}|$ är konstant





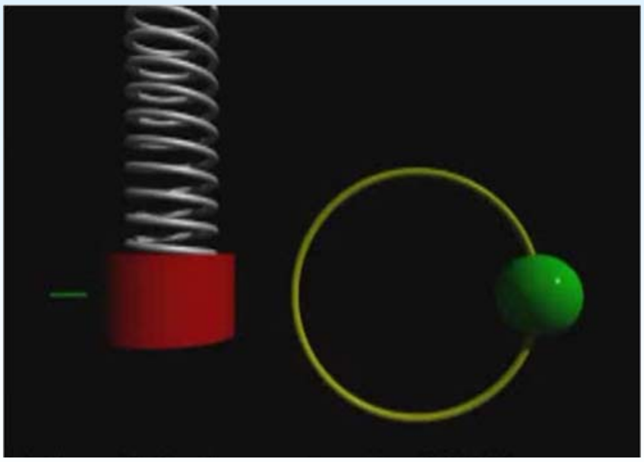
$$\text{Hastighet} = \frac{\text{avstånd}}{\text{tid}} = \frac{\text{omkrets}}{\text{period}}$$

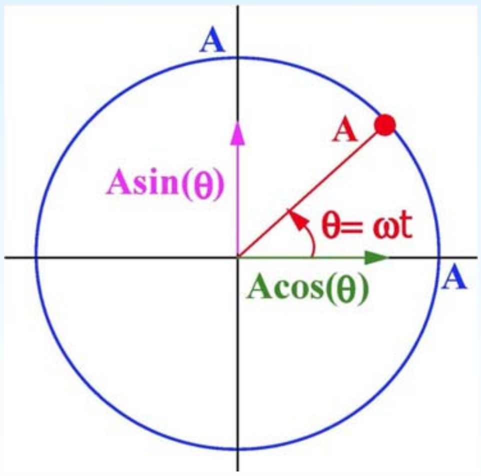
$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

$$\text{Acceleration:} \quad a = v^2 / r = \omega^2 r$$

Harmonisk Svängning: Cirkulär rörelse

Både harmonisk svängning och cirkulär rörelse kan beskrivas av en sinus funktion.

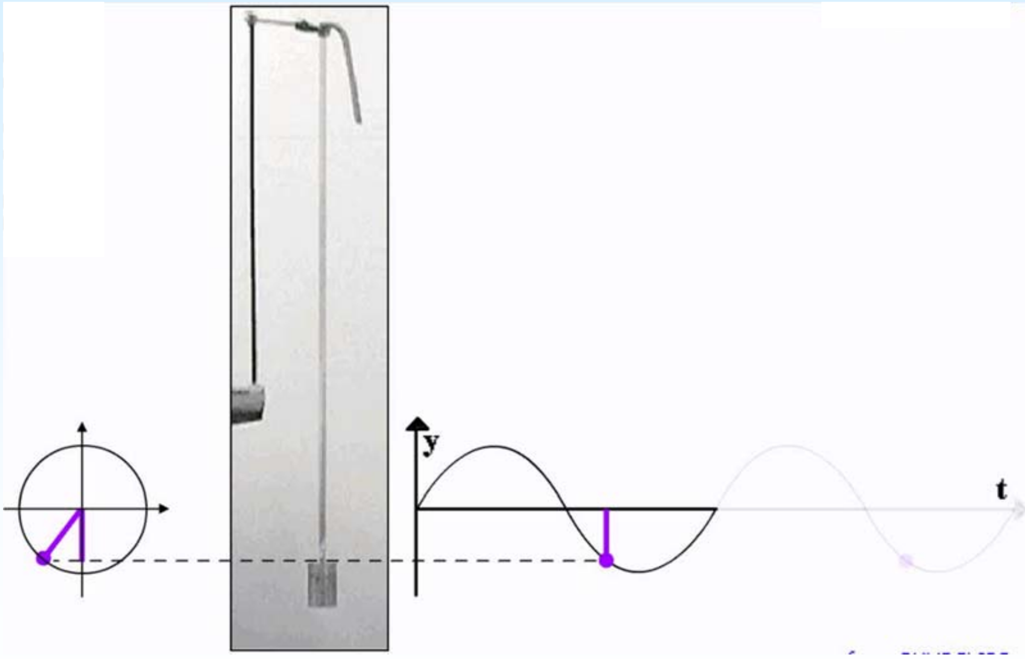




$\boxed{\theta = \omega t}$ Vinkeln ökar linjärt med tiden

https://www.youtube.com/watch?v=9r0HexjGRE4

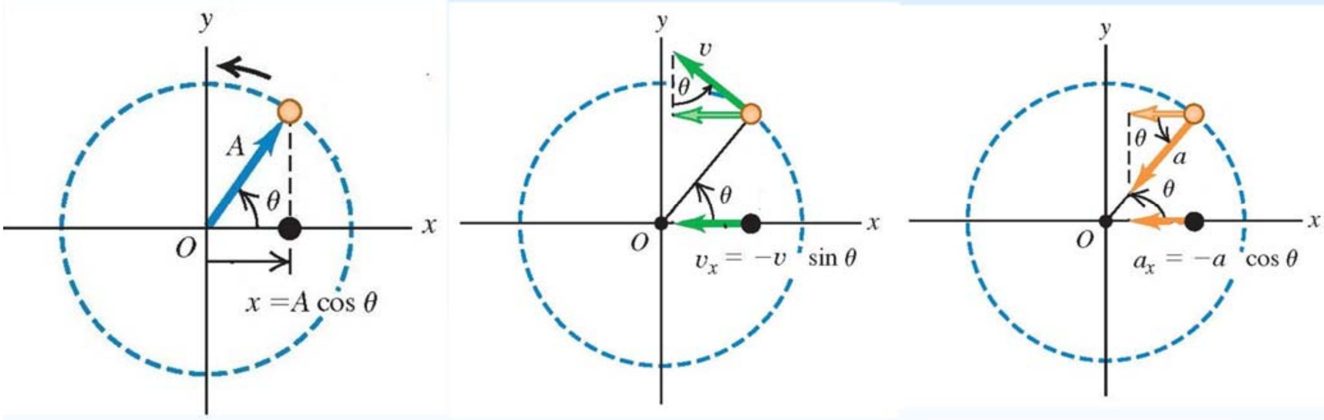
Harmonisk Svängning: Cirkulär rörelse



http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/flash/shm_spring1.swf

Harmonisk Svängning: Circulär rörelse

Vad blir x, v och a i x-riktningen ?



$x = A\cos\theta$ $\qquad v_x = -v \sin\theta$ $\qquad a_x = -a \cos\theta$

A = radius

Totala accelerationen: $a = v^2/r = \omega^2 r = \omega^2 A$ $\qquad a_x = -\omega^2 A\cos\theta$

Harmonisk Svängning: Cirkulär rörelse

Kombinera

accelerationen från diskussionen om krafter

med

accelerationen för cirkulär rörelse

Harmonisk Svängning: Circulär rörelse

Krafter

F = m a

F = -k x

$a_x = -\frac{k}{m} x$

Circulär Rörelse

$$x = A\cos\theta$$

$$a_x = -\omega^2 A\cos\theta$$

$a_x = -\omega^2 x$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

En harmonisk svängning kräver en motverkande kraft som är proportionell mot förflyttningen.

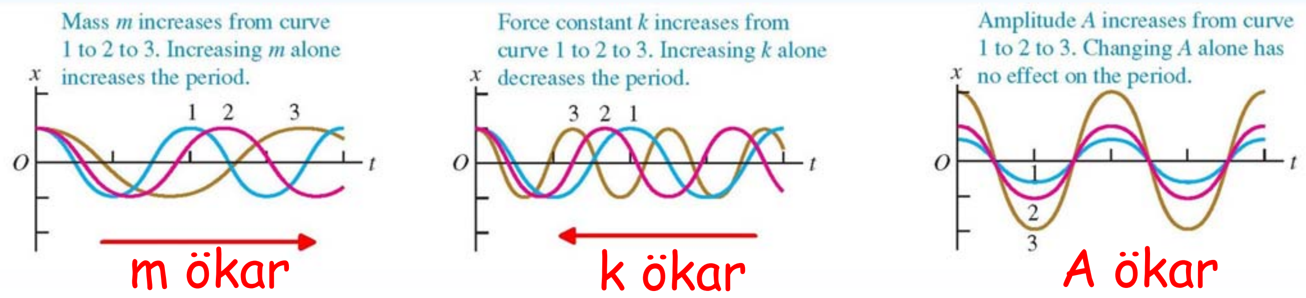
Harmonisk Svängning

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(simple harmonic motion)}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(simple harmonic motion)}$$

Observera: f och T beror enbart på k och m.
Inte på amplituden !



Harmonisk Svängning
Rörelse ekvationer

Förflyttning: $x = A\sin(\omega t) \longrightarrow x_{max} = A$

Hastighet: $v = \frac{dx}{dt}$ $\quad v = \omega A\cos(\omega t) \longrightarrow v_{max} = \omega A$

Acceleration: $a = \frac{dv}{dt}$ $\quad a = -\omega^2 A\sin(\omega t) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$

Rörelse av en massa hängande i en fjäder.

$x = 0$ när $t = 0$

Förflyttning: $x = A\cos(\omega t) \longrightarrow x_{max} = A$

Hastighet: $v = \frac{dx}{dt}$ $\quad v = -\omega A\sin(\omega t) \longrightarrow v_{max} = \omega A$

Acceleration: $a = \frac{dv}{dt}$ $\quad a = -\omega^2 A\cos(\omega t) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$

Massa i circulär rörelse.

$x = A$ när $t = 0$

Förflyttning: $x = A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow x_{max} = A$

Hastighet: $v = \frac{dx}{dt}$ $\quad v = -\omega A\sin(\omega t+\phi) \longrightarrow v_{max} = \omega A$

Acceleration: $a = \frac{dv}{dt}$ $\quad a = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$

Harmonisk svängning

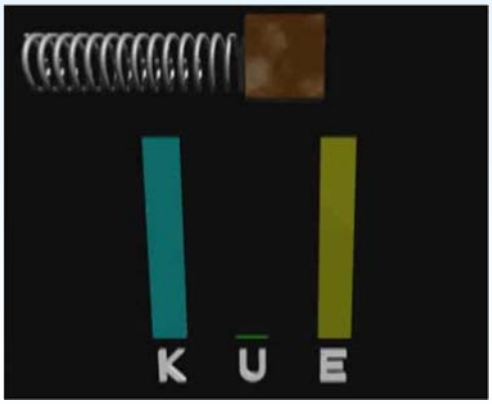
$x = A\cos(\phi)$ när $t = 0$

ϕ = fasvinkeln

(avgör läget vid $t = 0$)

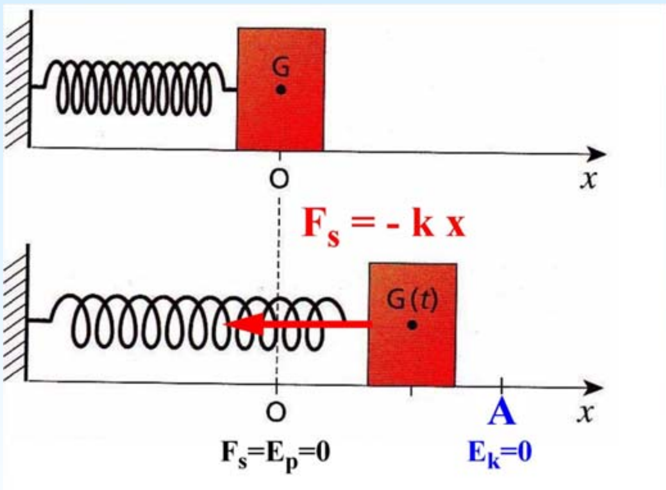
Harmonisk Svängning
Energi

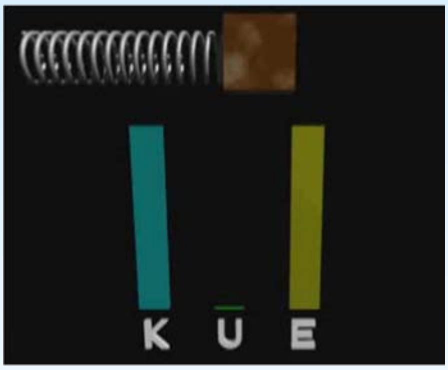
Del 7. Energi och harmoniska svängningar



https://www.youtube.com/watch?v=PL5g_IwrC5U

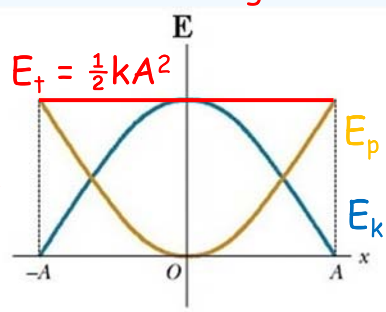
Harmonisk Svängning
Energi





Total mekaniska energin är konstant

Kinetisk energi:	$E_k = \frac{mv^2}{2}$	där $v = -\omega A \sin(\omega t)$
Potentiell energi:	$E_p = \frac{kx^2}{2}$	där $x = A\cos(\omega t)$
Total energi:	$E_t = E_k + E_p = \frac{kA^2}{2}$	(ty $E_k = 0$ för $x = A$)



Harmonisk Svängning
Energi

$$x = A\cos(\omega t+\phi)$$
$$v = -\omega A\sin(\omega t+\phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

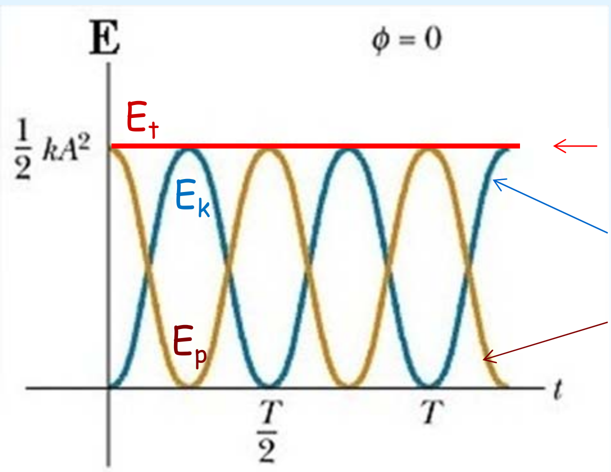
$$E_p = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\phi)$$

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\phi) = \tfrac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\phi)$$

$$E_t = E_p + E_k = \tfrac{1}{2}kA^2[\cos^2(\omega t+\phi) + \sin^2(\omega t+\phi)] = \tfrac{1}{2}kA^2$$

Harmonisk Svängning
Energi

Energins tidsberoende beskrivs av kvadraten av sinus funktioner



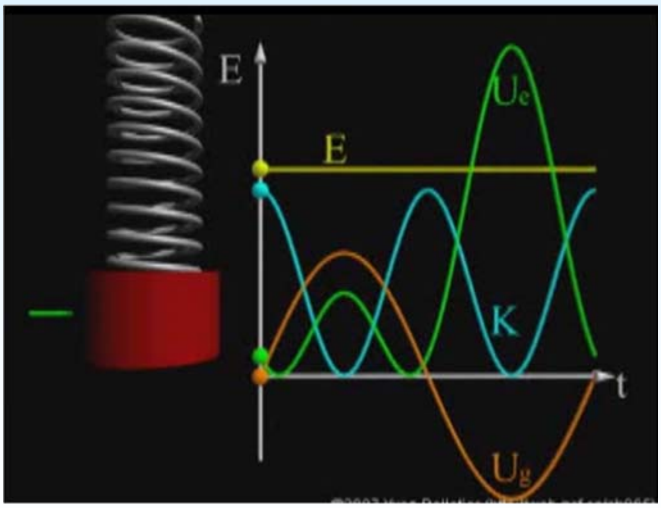
$$E_t = E_p + E_k = \tfrac{1}{2}kA^2$$

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t)$$

$$E_p = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t)$$

Harmonisk Svängning
Energi

Om svängningen är vertikal får man en potentiell energi också från gravitationen.



U_e: Elastisk potentiell energi

U_g: Potentiell energi pga gravitationen

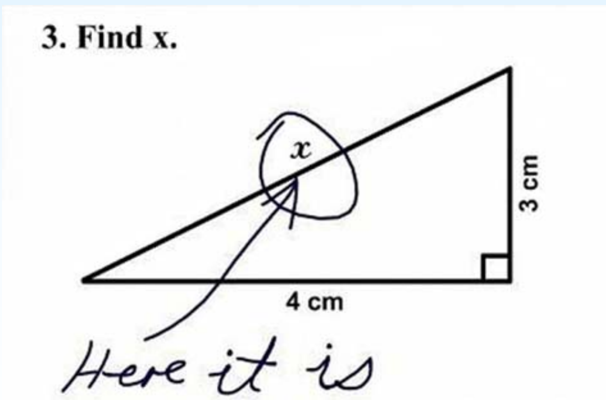
K: Kinetisk energi

E: Total mekanisk energi

https://www.youtube.com/watch?v=lIPWyY__N2A

Harmonisk Svängning
Problem

Del 8. Problem lösning



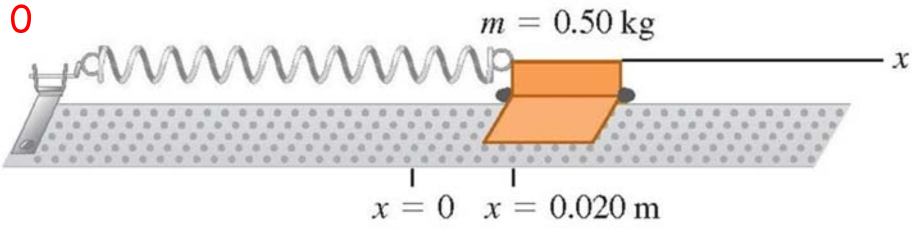
Harmonisk Svängning Problem

$A = 0.020$ m

$k = 200$ N/m

$m = 0.50$ kg

t = 0



Vad är v_{max}, a_{max} och ω ?

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\phi)} \longrightarrow x_{max} = A$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\phi) \longrightarrow v_{max} = \omega A$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} = \sqrt{\frac{200 \text{ kg/s}^2}{0.50 \text{ kg}}} = 20 \text{ rad/s}$$

$$v_{max} = 20 \cdot 0.020 = 0.40 \text{ m/s}$$

$$a_{max} = 20 \cdot 20 \cdot 0.020 = 8 \text{ m/s}^2$$

Harmonisk Svängning Problem

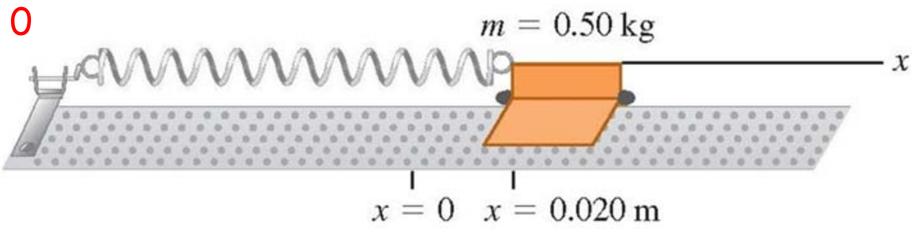
$A = 0.020$ m

$k = 200$ N/m

$m = 0.50$ kg

$\omega = 20$ rad/s

t = 0



Vad är fasvinkeln ?

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\phi)} \longrightarrow x_{max} = A$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\phi) \longrightarrow v_{max} = \omega A$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$$

Getting the phase angle:

$x = A$ when $t = 0$

$A = A\cos(0 + \phi)$

$\phi = 0$

Harmonisk Svängning Problem

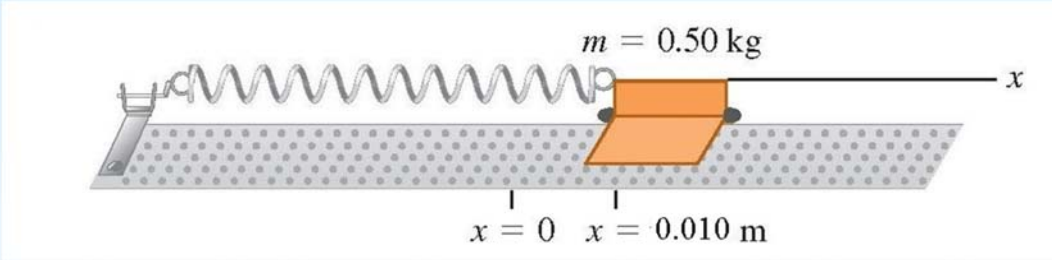
$A = 0.020$ m

$k = 200$ N/m

$m = 0.50$ kg

$\omega = 20$ rad/s

$\phi = 0$



Vad är v och a när x är halvvägs in från det maximala läget ?

$$x = A\cos(\omega t) \longrightarrow x_{max} = A$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t) \longrightarrow v_{max} = \omega A$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t) \longrightarrow a_{max} = \omega^2 A$$

$x = A\cos(\omega t)$

$0.010 = 0.020\cos(20t)$

$\omega t = 20t = \mathrm{acos}(0.010/0.020) = 1.047$ rad

$v = -20 \cdot 0.020 \sin(1.047) = -0.35$ m/s

$a = -20^2 \cdot 0.020 \cos(1.047) = -4.0$ m/s^2

Harmonisk Svängning Problem

$A = 0.020$ m

$k = 200$ N/m

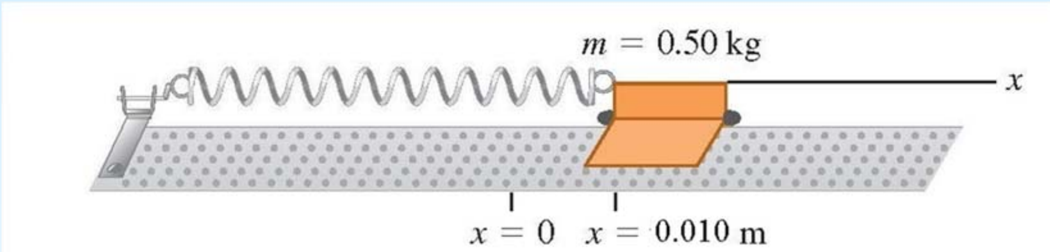
$m = 0.50$ kg

$\omega = 20$ rad/s

$\phi = 0$

$x = 0.010$ m

$v = -0.35$ m/s



Vad är den kinetiska, potentiella och totala energin ?

Kinetisk energi: $E_k = \frac{mv^2}{2}$ där $v = -\omega A\sin(\omega t)$

Potentiell energi: $E_p = \frac{kx^2}{2}$ där $x = A\cos(\omega t)$

Total energi: $E_t = E_k + E_p = \frac{kA^2}{2}$ (ty $E_k = 0$ för $x = A$)

$$Ep = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(200\ \mathrm{N/m})(0.010\ \mathrm{m})^2 = 0.010\ \mathrm{J}$$

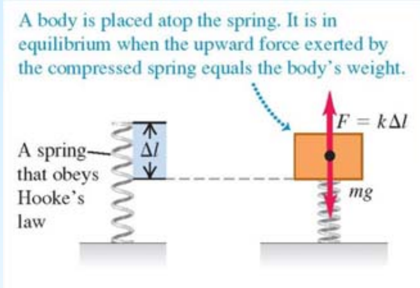
$$Ek = \tfrac{1}{2}mv_x^2 = \tfrac{1}{2}(0.50\ \mathrm{kg})(-0.35\ \mathrm{m/s})^2 = 0.030\ \mathrm{J}$$

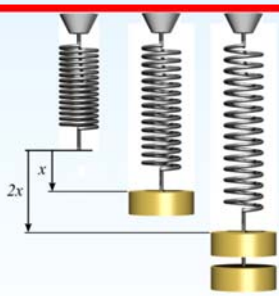
Harmonisk Svängning Problem

Anta följande: En bil har massan 1000 kg.
En förare ger F = 980 N och orsakar att stötdämparna går ned med 2.8 cm.

Bilen kör över ett gupp och börjar svänga harmoniskt.

Vad blir perioden och frekvensen ?





$$k = -\frac{F_x}{x} = -\frac{980\ \text{N}}{-0.028\ \text{m}} = 3.5 \times 10^4\ \text{kg/s}^2$$

The person's mass is $w/g = (980\ \text{N})/(9.8\ \text{m/s}^2) = 100$ kg. The *total* oscillating mass is $m = 1000\ \text{kg} + 100\ \text{kg} = 1100$ kg. The period T is

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1100\ \text{kg}}{3.5 \times 10^4\ \text{kg/s}^2}} = 1.11\ \text{s}$$

The frequency is $f = 1/T = 1/(1.11\ \text{s}) = 0.90$ Hz.

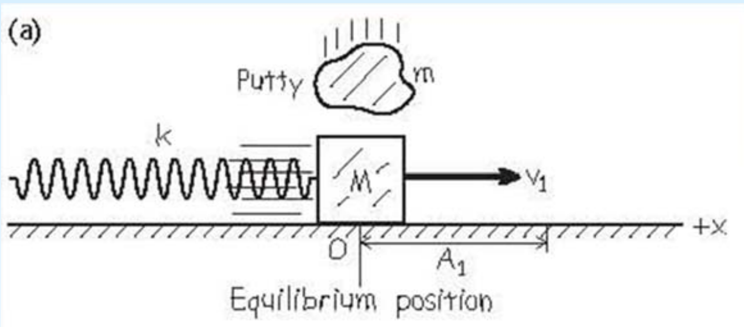
$F_x = -kx$
$f = 1/T$
$\omega = 2\pi f$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Harmonisk Svängning Problem

En klump lera med massan m fastnar på en svängande massa M vid jämviktsläget.

Beräkna ny period T_2 och ny amplitud A_2 !
Ge resultatet som funktion av k, m, M och v_1 !



$f = 1/T$
$\omega = 2\pi f$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Den nya perioden T_2:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

Harmonisk Svängning
Problem

Konserveringslagar: Energin och rörelsemängden (P=mv) är bevarade

Steg 1. Rörelsemängdens bevarande ger v_2:

$P_1 = P_2$
$Mv_1 = (M+m)v_2$ ⇒ $v_2 = v_1 \frac{M}{M+m}$

Steg 2. Den nya totala energin vid x = 0:

$E_{t2} = E_{k2} + 0 = \frac{1}{2}(M+m)v_2^2 = \frac{1}{2}v_1^2 \frac{M^2}{M+m}$

Steg 3. Den nya totala energin vid x = A_2:

$E_{t2} = 0 + E_{p2} = \frac{1}{2}kA_2^2$

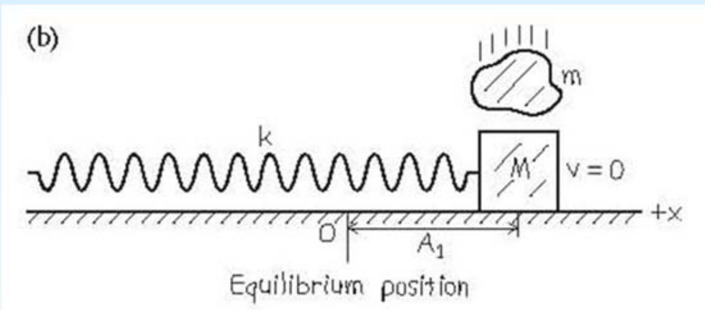
Steg 4. Energins bevarande ger A_2:

$$\frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}v_1^2 \frac{M^2}{M+m} \Rightarrow A_2 = v_1 \frac{M}{\sqrt{(M+m)k}}$$

Harmonisk Svängning
Problem

En klump lera med massan m fastnar på en svängande massa M vid maximal läget.

Beräkna ny period T_2 och amplitud A_2 !



$f = 1/T$
$\omega = 2\pi f$
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

För x = A är den kinetiska energin = 0:

$E_{t1} = 0 + E_{p1} = \frac{1}{2}kA_1^2$

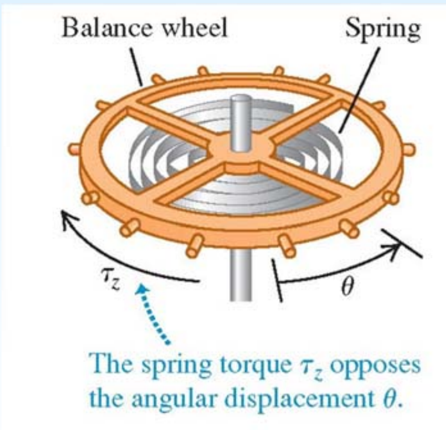
$E_{t2} = 0 + E_{p2} = \frac{1}{2}kA_2^2$

Den totala energin är bevarad: $A_2 = A_1$

Del 9. Harmonisk vinkelrörelse

The Henry Graves supercomplication
Värde: 206 miljoner kronor

Fjädern i en klocka utför en harmonisk svängning.

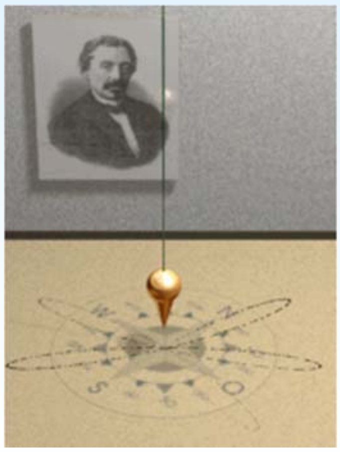


$$\boxed{\theta = \Theta \cos(\omega t + \phi)}$$

Harmonisk Svängning
Pendeln

Del 10. Pendeln

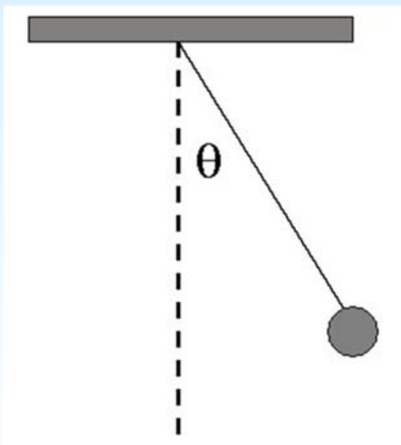
Foucaults pendel



Demonstrerar jordens rotation

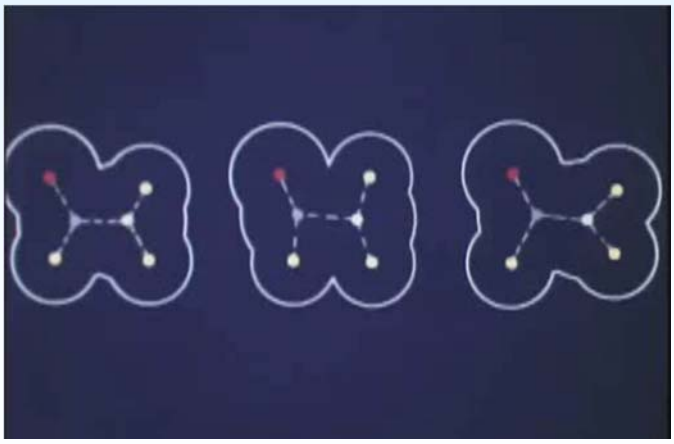
Harmonisk Svängning
Pendeln

Pendeln utför harmoniska svängningar



$$\boxed{\theta = \Theta \cos(\omega t + \phi)}$$

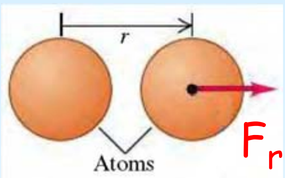
Del 11. Molekylers vibration



https://www.youtube.com/watch?v=3RqEIr8NtMI

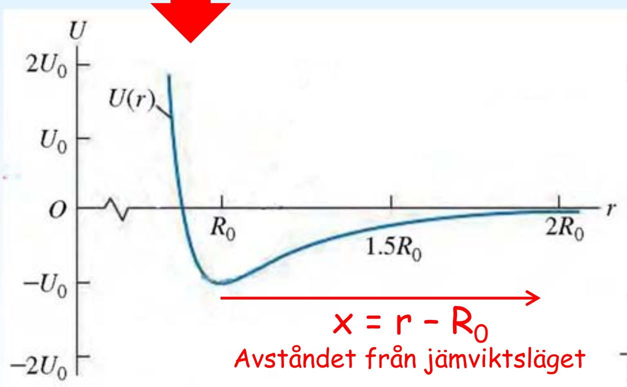
Potentiell energi (U)

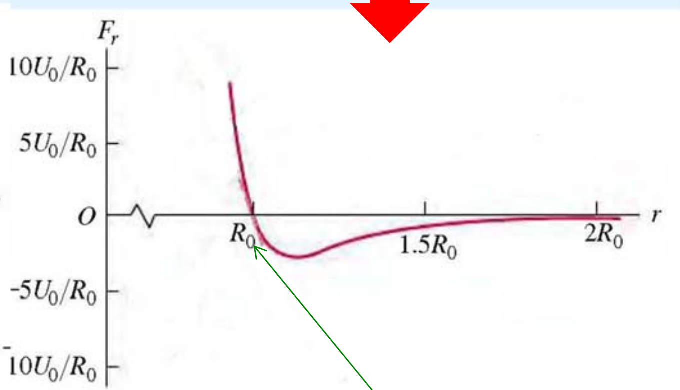
$$U = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^{6}\right]$$



Kraften mellan två atomer (F_r)

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = U_0\left[\frac{12R_0^{12}}{r^{13}} - 2\frac{6R_0^{6}}{r^{7}}\right] = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r}\right)^{7}\right]$$





Jämviktsläget är vid $r = R_0$ för då är U minimum och F = 0

Harmonisk Svängning Molekyler

Matematik: Binomialteoremet

$$\boxed{(1+u)^n = 1 + nu} + \frac{n(n-1)}{2!}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^3 + \cdots$$

Om u är litet kan början av serien användas som approximation:

$$(1+0.001)^{13} = 1.013078......$$

$$(1+0.001)^{13} \approx 1 + 13 \cdot 0.001 = 1.013$$

Harmonisk Svängning Molekyler

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = U_0\left[\frac{12R_0^{12}}{r^{13}} - 2\frac{6R_0^6}{r^7}\right] = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r}\right)^7\right]$$

$$x = r - R_0$$

$$F_r = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^7\right]$$

$$= 12\frac{U_0}{R_0}\left[\frac{1}{(1+x/R_0)^{13}} - \frac{1}{(1+x/R_0)^7}\right]$$

Anta att vibrationerna är små så att x/R_0 är litet!

Då kan man använda Binomialteoremet:

$$\frac{1}{(1+x/R_0)^{13}} = (1+x/R_0)^{-13} \approx 1 + (-13)\frac{x}{R_0}$$

$$\frac{1}{(1+x/R_0)^7} = (1+x/R_0)^{-7} \approx 1 + (-7)\frac{x}{R_0}$$

$$\boxed{F_r \approx} 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(1 + (-13)\frac{x}{R_0}\right) - \left(1 + (-7)\frac{x}{R_0}\right)\right] = \boxed{-\left(\frac{72U_0}{R_0^2}\right)x}$$

This is just Hooke's law, with force constant $k = 72U_0/R_0^2$