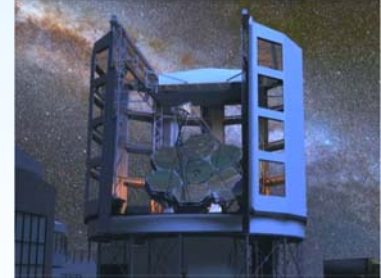
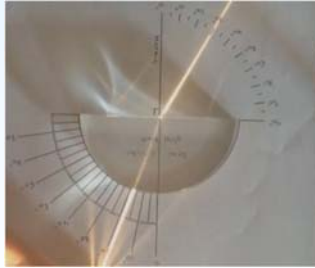
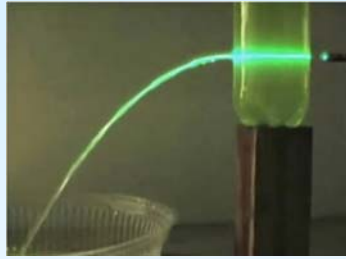
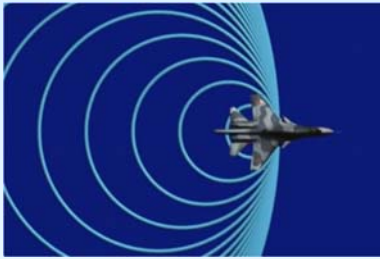




# Vågrörelselära och optik



## Kapitel 15 - Mekaniska vågor

Vincent Hedberg - Lunds Universitet

1



# Vågrörelselära och optik



**Kurslitteratur: University Physics by Young & Friedman (14th edition)**

Harmonisk oscillator:	Kapitel 14.1 - 14.4
Mekaniska vågor:	Kapitel 15.1 - 15.8
Ljud och hörande:	Kapitel 16.1 - 16.9
Elektromagnetiska vågor:	Kapitel 32.1 & 32.3 & 32.4
Ljusets natur:	Kapitel 33.1 - 33.4 & 33.7
Stråloptik:	Kapitel 34.1 - 34.8
Interferens:	Kapitel 35.1 - 35.5
Diffraction:	Kapitel 36.1 - 36.5 & 36.7

Vincent Hedberg - Lunds Universitet

2



# Vågrörelselära och optik



Tid	Må	31-Oct	Ti	01-Nov	On	02-Nov	To	03-Nov	Fr	04-Nov
08-10										
10-12			Väglära (A)	kap 14 kap 14		Väglära (A)	kap 14 kap 15		Väglära (A)	kap 15 kap 15
13-15			Övningar Optik&Våg (L218-19)						Övningar Optik&Våg (L218-19)	
15-17										
Tid	Må	07-Nov	Ti	08-Nov	On	09-Nov	To	10-Nov	Fr	11-Nov
08-10							Väglära (A)	kap 16 kap 32		
10-12	Väglära (A)	kap 15 kap 16	Väglära (A)	kap 16 kap 16					Väglära/Optik (A)	kap 32 kap 33
13-15			Övningar Optik&Våg (d. 13-16) (L218-19)						Övningar Optik&Våg (L218-19)	
15-17										
Tid	Må	14-Nov	Ti	15-Nov	On	16-Nov	To	17-Nov	Fr	18-Nov
08-10										
10-12	Optik (A)	kap 33 kap 34	Optik (A)	kap 34 kap 34					Optik (A)	kap 34 kap 34
13-15			Övningar Optik&Våg (L218-19)						Övningar Optik&Våg (L218-19)	
15-17										
Tid	Må	21-Nov	Ti	22-Nov	On	23-Nov	To	24-Nov	Fr	25-Nov
08-10			Optik (A)	kap 35 kap 36						
10-12	Optik (A)	kap 34 kap 35	Optik (A)	kap 36 kap 36						
13-15			Övningar Optik&Våg (L218-19)							
15-17										



# Mekaniska vågor: Transversella vågor



## Del 1. Transversella vågor





## Mekaniska vågor: Transversella vågor



### Vad är en våg ?

En våg uppstår när ett systems jämviktstillstånd störs och denna störning förflyttar sig.

En mekanisk våg förflyttar sig i ett medium.

En elektromagnetisk våg kan också förflytta sig utan ett medium i vakuum.

Vågor transporterar energi men inte materia.



## Mekaniska vågor: Transversella vågor



Transversell våg: Mediumet rör sig i transversell riktning mot vågens färdriktning.

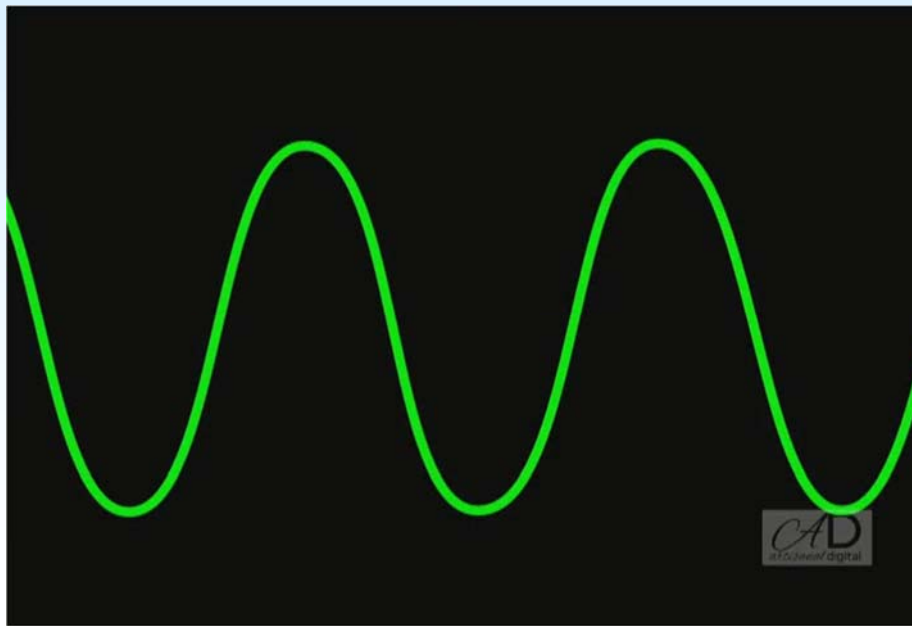
<https://www.youtube.com/watch?v=FUBGrH-PbsU>



# Mekaniska vågor: Transversella vågor



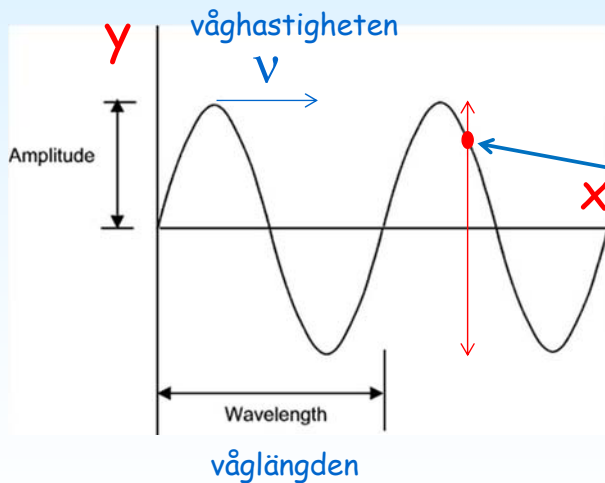
En speciell transversell våg är den sinusformade vågen:



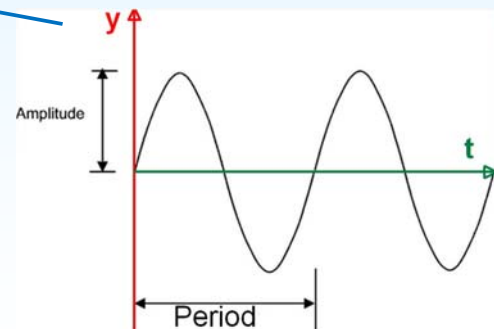
# Mekaniska vågor: Transversella vågor



## Transversella sinus vågor



Varje punkt på vågen rör sig upp och ner som en harmonisk svängning med perioden  $T$ .

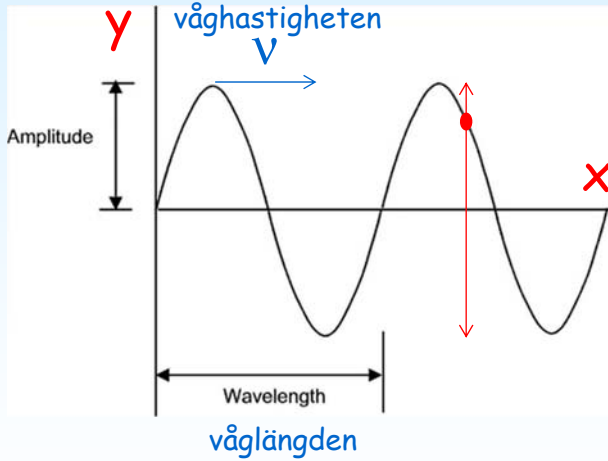




# Mekaniska vågor: Transversella vågor



## Definitioner:



A: Amplitud (m)

T: Period (s)

$\lambda$ : Våglängd (m)

v: Vågshastighet (m/s) =  $\lambda / T$

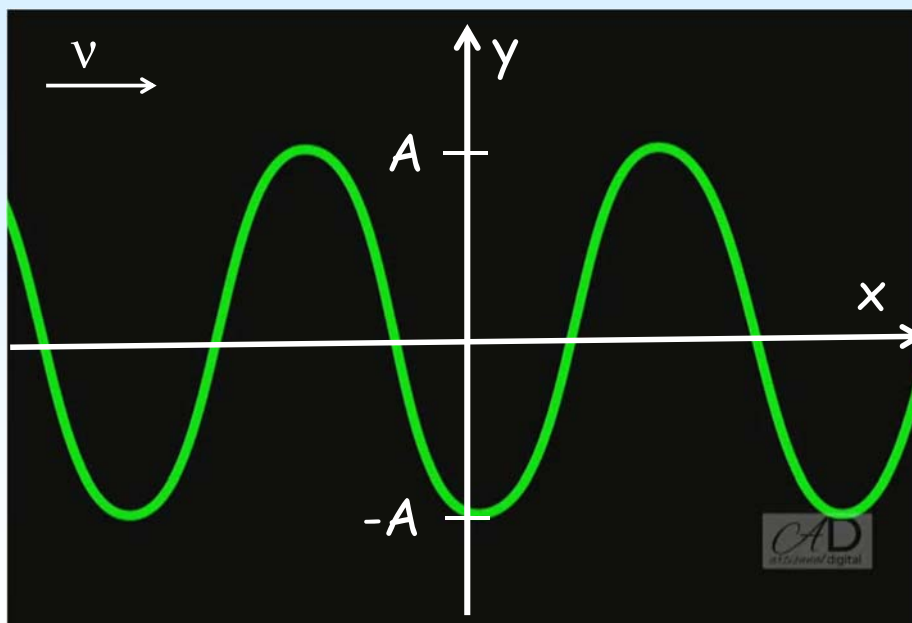
f: Frekvens (Hz) =  $1 / T$

$\omega$ : Vinkelfrekvens (radianer /s) =  $2 \pi f$

k: Vågtalet (radianer /m) =  $2 \pi / \lambda$



# Mekaniska vågor: Transversella vågor





## Mekaniska vågor: Longitudinella vågor



# Del 2. Longitudinella vågor



Longitudinella vågor av Slipnot:  
Why don't you get a job ?



## Mekaniska vågor: Longitudinella vågor



Longitudinella vågor:  
Mediumet rör sig i vågens rörelseriktning.

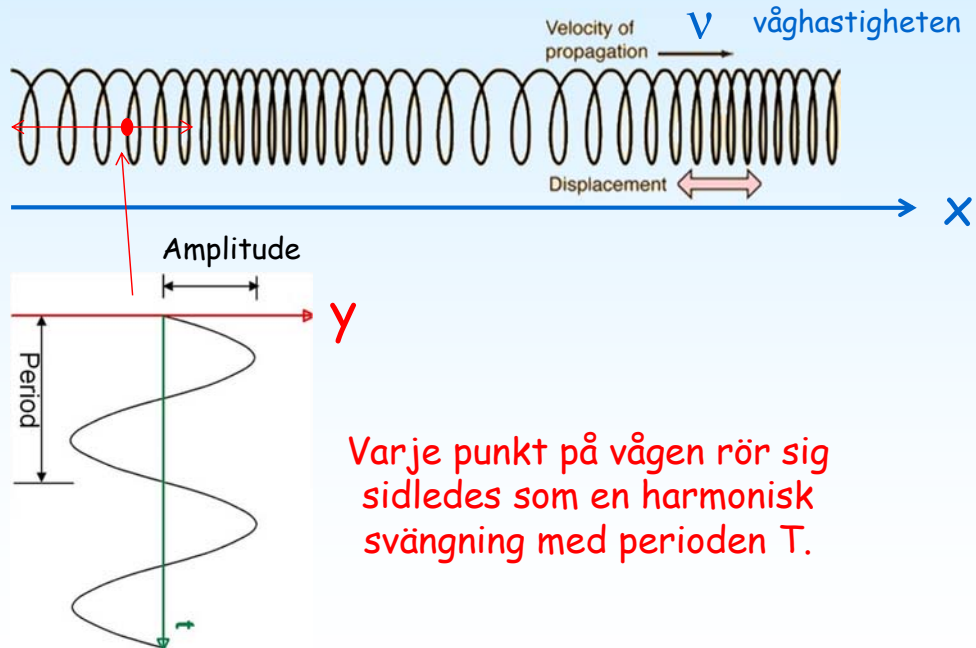




# Mekaniska vågor: Longitudinella vågor



## Longitudinella sinus vågor



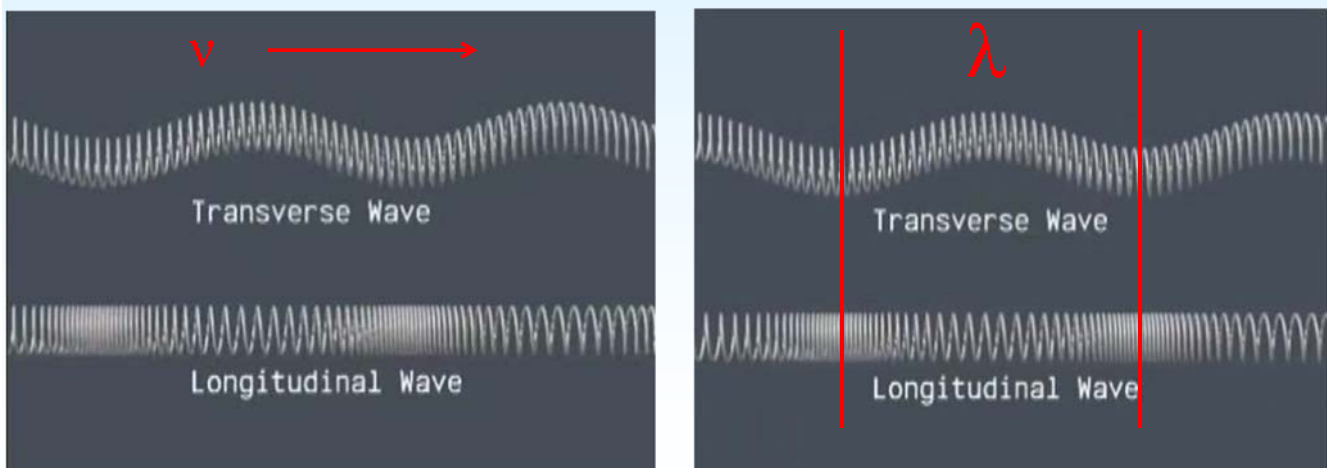
# Mekaniska vågor: Longitudinella vågor



Vad är våglängden ( $\lambda$ ) för en sinus våg ?

Vad är våghastigheten ( $v$ ) ?

$$v = \lambda / T$$

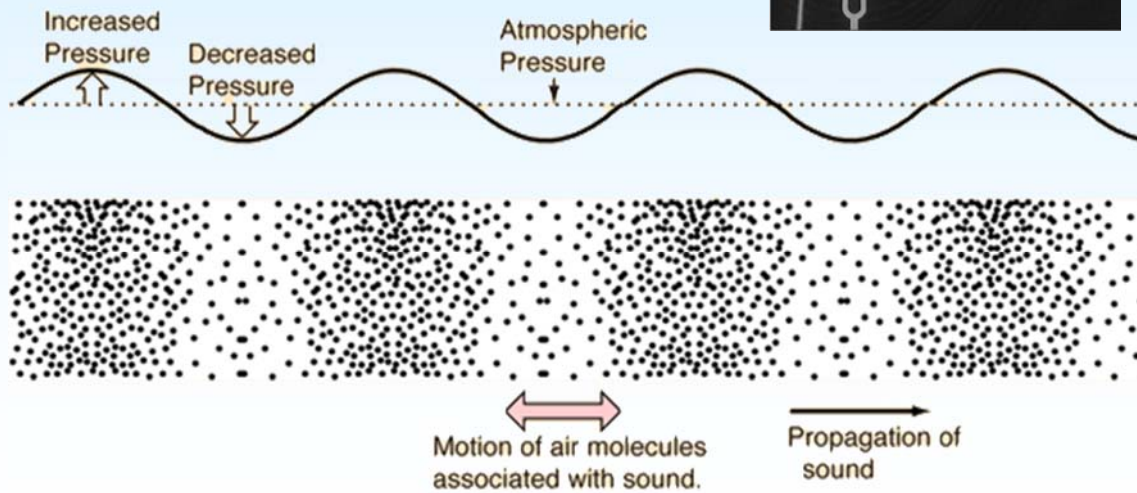
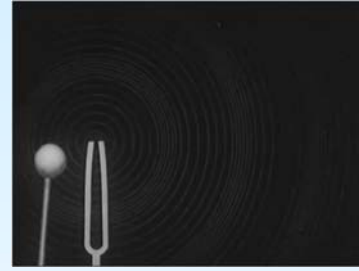




# Mekaniska vågor: Longitudinella vågor



Ljud är longitudinella  
vågor i luft.



# Mekaniska vågor Problem



## Del 3. Problem lösning

$$\frac{1}{n} \sin x = ?$$

$$\frac{1}{n} \cancel{\sin} x =$$

$$six = 6$$





# Mekaniska vågor Problem



Ljudets hastighet beror av temperaturen och är 344 m/s vid 20 grader.

Vad är då våglängden av ljud med frekvensen 262 Hz ?

$$v = \lambda / T$$
$$f = 1 / T$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{344 \text{ m/s}}{262 \text{ Hz}} = \frac{344 \text{ m/s}}{262 \text{ s}^{-1}} = 1.31 \text{ m}$$



# Mekaniska vågor: Vågfunktionen



## Del 4. Vågfunktionen

Einstein:  
 $E = mc^2$

Pythagoras:  
 $a^2 + b^2 = c^2$

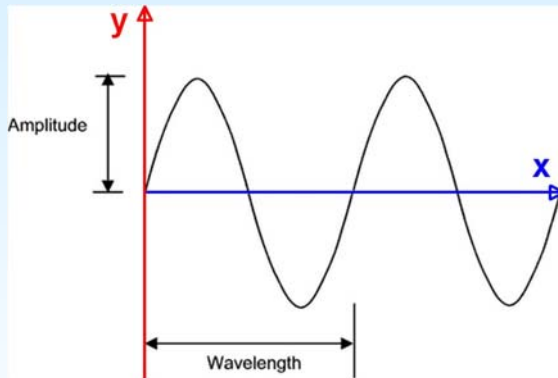
$\therefore E = m(a^2 + b^2) ?$



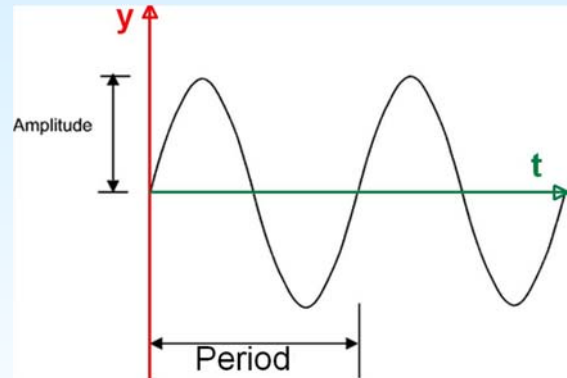
# Mekaniska vågor: Vågfunktionen



Höjden av vågen som funktion av avståndet  $x$ :



Höjden av vågen som funktion av tiden  $t$ :



Vågfunktionen  $y(x,t)$ :

Vågfunktionen beskriver höjden av vågen som funktion av både avstånd och tid.

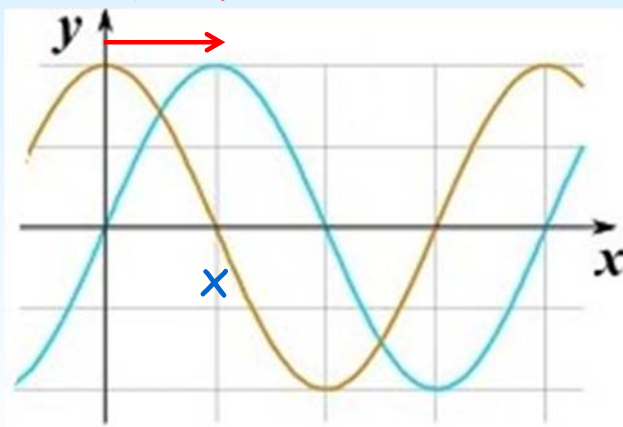


# Mekaniska vågor: Vågfunktionen



En våg förflyttar sig sträckan  $x$  under tiden

$$\Delta t = x/v$$



Anta att punkten vid  $x=0$  kan beskrivas av

$$y(0,t) = A\cos(\omega t)$$

En annan punkt vid läget  $x$  kommer ha samma  $y$  som vågen hade  $\Delta t = x/v$  tidigare d.v.s. substituera  $t$  mot  $t-x/v$ :

$$y(x,t) = A\cos(\omega(t-x/v))$$

$$y(x,t) = A\cos(\omega(x/v-t))$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

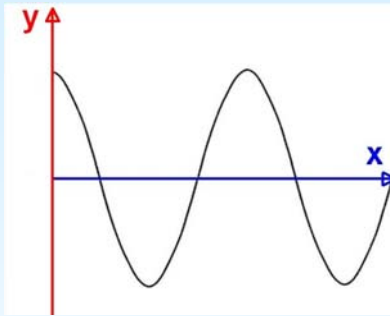
$$y(x,t) = A\cos(\omega(x/v-t)) = A\cos(2\pi f(x/v-t)) = A\cos(2\pi(fx/v-ft))$$

$$y(x,t) = A\cos(2\pi(x/\lambda-t/T)) = A\cos(kx-\omega t)$$

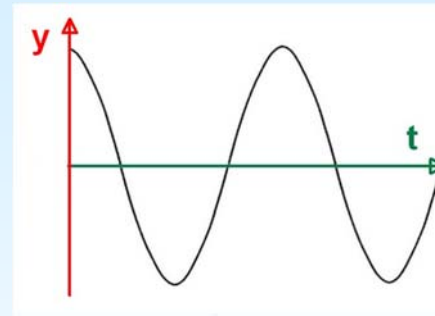
$$f/v = 1/\lambda$$



# Mekaniska vågor: Vågfunktionen



$$y(x, t = 0) = A \cos kx$$



$$y(x = 0, t) = A \cos \omega t$$

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (\text{sinusoidal wave moving in } +x\text{-direction})$$

+ om vågen rör sig i den negativa x riktningen



# Mekaniska vågor: Vågfunktionen



$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (\text{sinusoidal wave moving in } +x\text{-direction})$$

Amplitud:  $A$

Vågtalet:  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Vinkelfrekvens:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$v = \lambda / T$$

$$f = 1 / T$$

$$v = \lambda / T = (2\pi/k) / (2\pi/\omega) = \omega / k$$



# Mekaniska vågor: Vågfunktionen



## Vågfunktionen:

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

## Hastighet och acceleration:

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

$$a_y(x, t) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(kx - \omega t) = -\omega^2 y(x, t)$$



# Mekaniska vågor: Vågfunktionen

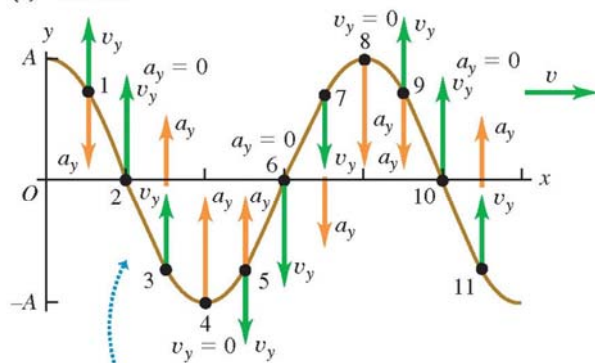


## Hastighet och acceleration:

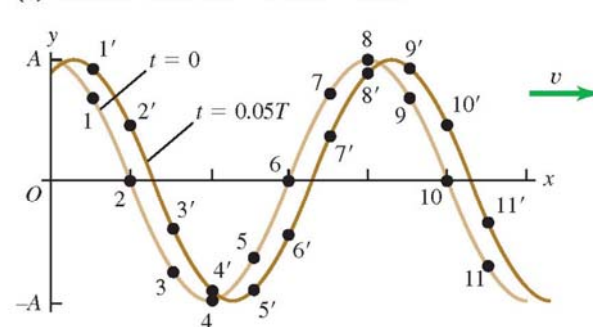
$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

$$a_y(x, t) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(kx - \omega t) = -\omega^2 y(x, t)$$

(a) Wave at  $t = 0$



(b) The same wave at  $t = 0$  and  $t = 0.05T$



- Acceleration  $a_y$  at each point on the string is proportional to displacement  $y$  at that point.
- Acceleration is upward where string curves upward, downward where string curves downward.



# Mekaniska vågor: Vågekvationen



## Del 5. Vågekvationen

Ekvationen för standard  
modellen i partikelfysik:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM} = & -\frac{1}{2}\partial_\nu g_\mu^\alpha \partial_\nu g_\mu^\alpha - g_\mu^{abc} \partial_\nu g_\nu^a g_\nu^b g_\nu^c - \frac{1}{4}g_s^2 f^{abc} f^{ade} g_\mu^b g_\nu^c g_\mu^d g_\nu^e - \partial_\nu W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- - \\ & M^2 W_\mu^+ W_\mu^- - \frac{1}{2}\partial_\nu Z_\mu^0 \partial_\nu Z_\mu^0 - \frac{1}{2}M^2 Z_\mu^0 Z_\mu^0 - \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - ig_{\text{c.w.}}(\partial_\nu Z_\mu^0(W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) - \\ & Z_\nu^0(W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\nu^- \partial_\mu W_\mu^+) + Z_\mu^0(W_\nu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\nu^- \partial_\mu W_\mu^+) - ig_{\text{s.w.}}(\partial_\nu A_\mu(W_\mu^+ W_\nu^- - \\ & W_\nu^+ W_\mu^-) - A_\nu(W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\nu^- \partial_\mu W_\mu^+) + A_\mu(W_\nu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\nu^- \partial_\mu W_\mu^+) - \\ & \frac{1}{2}g^2 W_\mu^+ W_\nu^- W_\nu^+ W_\mu^- + \frac{1}{2}g^2 W_\mu^+ W_\nu^- W_\mu^+ W_\nu^- + g^2 s_w c_w (Z_\mu^0 W_\nu^+ Z_\nu^0 W_\mu^- - Z_\nu^0 W_\mu^+ Z_\nu^0 W_\nu^-) + \\ & g^2 s_w^2 (A_\mu W_\nu^+ A_\nu W_\mu^- - A_\mu A_\nu W_\nu^+ W_\mu^-) + g^2 s_w c_w (A_\mu Z_\nu^0 (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) - \\ & 2A_\mu Z_\nu^0 W_\mu^+ W_\nu^-) - \frac{1}{2}\partial_\mu H \partial_\mu H - 2M^2 \alpha_h H^2 - \partial_\mu \phi^+ \partial_\mu \phi^- - \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^0 \partial_\mu \phi^0 - \\ & \beta_h \left( \frac{2M^2}{g^2} + \frac{2M}{g} H + \frac{1}{2}(H^2 + \phi^0 \phi^0 + 2\phi^+ \phi^-) \right) + \frac{2M^4}{g^2} \alpha_h - g \alpha_h M (H^3 + H \phi^0 \phi^0 + 2H \phi^+ \phi^-) - \\ & \frac{1}{8}g^2 \alpha_h (H^4 + (\phi^0)^4 + 4(\phi^+ \phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2 \phi^+ \phi^- + 4H^2 \phi^+ \phi^- + 2(\phi^0)^2 H^2) - g M W_\mu^+ W_\mu^- H - \\ & \frac{1}{2}g \frac{M}{c_w} Z_\mu^0 Z_\mu^0 H - \frac{1}{2}ig (W_\mu^+ (\phi^0 \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu \phi^0) - W_\mu^- (\phi^0 \partial_\mu \phi^+ - \phi^+ \partial_\mu \phi^0)) + \\ & \frac{1}{2}g (W_\mu^+ (H \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu H) + W_\mu^- (H \partial_\mu \phi^+ - \phi^+ \partial_\mu H)) + \frac{1}{2}g \frac{1}{c_w} (Z_\mu^0 (H \partial_\mu \phi^0 - \phi^0 \partial_\mu H) + \\ & M (\frac{1}{c_w} Z_\mu^0 \partial_\mu \phi^0 + W_\mu^+ \partial_\mu \phi^- + W_\mu^- \partial_\mu \phi^+) - ig \frac{g^2}{c_w} M Z_\mu^0 (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) + ig_{\text{s.w.}} M A_\mu (W_\mu^+ \phi^- - \\ & W_\mu^- \phi^+) - ig \frac{1-2s_w^2}{2c_w} Z_\mu^0 (\phi^+ \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu \phi^+) + ig_{\text{s.w.}} A_\mu (\phi^+ \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu \phi^+) - \\ & \frac{1}{4}g^2 W_\mu^+ W_\mu^- (H^2 + (\phi^0)^2 + 2\phi^+ \phi^-) - \frac{1}{8}g^2 \frac{1}{c_w^2} Z_\mu^0 Z_\mu^0 (H^2 + (\phi^0)^2 + 2(2s_w^2 - 1)^2 \phi^+ \phi^-) - \\ & \frac{1}{2}g^2 \frac{2s_w}{c_w} Z_\mu^0 \phi^0 (W_\mu^+ \phi^- + W_\mu^- \phi^+) - \frac{1}{2}ig^2 \frac{2s_w}{c_w} Z_\mu^0 H (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) + \frac{1}{2}g^2 s_w A_\mu \phi^0 (W_\mu^+ \phi^- + \\ & W_\mu^- \phi^+) + \frac{1}{2}ig^2 s_w A_\mu H (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) - g^2 \frac{2s_w}{c_w} (2c_w^2 - 1) Z_\mu^0 A_\mu \phi^+ \phi^- - g^2 s_w^2 A_\mu A_\mu \phi^+ \phi^- + \\ & \frac{1}{2}ig_s \lambda_{ij}^2 (g_i^\mu \gamma^\mu g_j^\nu) g_\mu^\lambda - e^\lambda (\gamma^\theta + m_\nu^2) e^\lambda - \bar{\nu}^\lambda (\gamma^\theta + m_\nu^2) \nu^\lambda - \bar{u}_j^\lambda (\gamma^\theta + m_u^2) u_j^\lambda - \bar{d}_j^\lambda (\gamma^\theta + m_d^2) d_j^\lambda + \\ & ig_{\text{s.w.}} A_\mu \left( -(\bar{e}^\lambda \gamma^\mu e^\lambda) + \frac{2}{3}(\bar{u}_j^\lambda \gamma^\mu u_j^\lambda) - \frac{1}{3}(\bar{d}_j^\lambda \gamma^\mu d_j^\lambda) \right) + \frac{ig}{4c_w} Z_\mu^0 \{ (\bar{\nu}^\lambda \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \nu^\lambda) + (\bar{e}^\lambda \gamma^\mu (4s_w^2 - \\ & 1 - \gamma^5) e^\lambda) + (\bar{d}_j^\lambda \gamma^\mu (\frac{4}{3}s_w^2 - 1 - \gamma^5) d_j^\lambda) + (\bar{u}_j^\lambda \gamma^\mu (1 - \frac{8}{3}s_w^2 + \gamma^5) u_j^\lambda) \} + \\ & \frac{ig}{2\sqrt{2}} W_\mu^+ \left( (\bar{\nu}^\lambda \gamma^\mu (1 + \gamma^5) U^{lep}{}_{\lambda e} e^\mu) + (\bar{u}_j^\lambda \gamma^\mu (1 + \gamma^5) C_{\lambda e} d_j^\mu) \right) + \\ & \frac{ig}{2\sqrt{2}} W_\mu^- \left( (\bar{e}^\mu U^{lep}{}_{\lambda \nu} \nu^\mu (1 + \gamma^5) \nu^\lambda) + (\bar{d}_j^\mu C_{\lambda \nu}^\dagger \gamma^\mu (1 + \gamma^5) u_j^\lambda) \right) + \\ & \frac{ig}{2M\sqrt{2}} \phi^+ (-m_e^\mu (\bar{\nu}^\lambda U^{lep}{}_{\lambda e} (1 - \gamma^5) e^\mu) + m_\nu^\mu (\bar{\nu}^\lambda U^{lep}{}_{\lambda e} (1 + \gamma^5) e^\mu) + \\ & \frac{ig}{2M\sqrt{2}} \phi^- (m_e^\mu (\bar{e}^\lambda U^{lep}{}_{\lambda \nu} (1 + \gamma^5) \nu^\mu) - m_\nu^\mu (\bar{e}^\lambda U^{lep}{}_{\lambda \nu} (1 - \gamma^5) \nu^\mu) - \frac{g}{2} \frac{m_h}{M} H (\bar{\nu}^\lambda \nu^\lambda) - \\ & \frac{g}{2} \frac{m_h}{M} H (\bar{e}^\lambda e^\lambda) + \frac{ig}{2} \frac{m_h}{M} \phi^0 (\bar{\nu}^\lambda \gamma^5 \nu^\lambda) - \frac{ig}{2} \frac{m_h}{M} \phi^0 (\bar{e}^\lambda \gamma^5 e^\lambda) - \frac{1}{4} \bar{\nu}_\lambda M_{\lambda \kappa}^R (1 - \gamma_5) \bar{\nu}_\kappa - \\ & \frac{1}{4} \bar{\nu}_\lambda M_{\lambda \kappa}^R (1 - \gamma_5) \bar{\nu}_\kappa + \frac{ig}{2M\sqrt{2}} \phi^+ (-m_u^\mu (\bar{u}_j^\lambda C_{\lambda e}^\dagger (1 - \gamma^5) d_j^\mu) + m_u^\mu (\bar{u}_j^\lambda C_{\lambda e} (1 + \gamma^5) d_j^\mu) + \\ & \frac{ig}{2M\sqrt{2}} \phi^- (m_d^\mu (\bar{d}_j^\lambda C_{\lambda \nu}^\dagger (1 + \gamma^5) u_j^\mu) - m_d^\mu (\bar{d}_j^\lambda C_{\lambda \nu} (1 - \gamma^5) u_j^\mu) - \frac{g}{2} \frac{m_h}{M} H (\bar{u}_j^\lambda u_j^\lambda) - \frac{g}{2} \frac{m_h}{M} H (\bar{d}_j^\lambda d_j^\lambda) + \\ & \frac{ig}{2} \frac{m_h}{M} \phi^0 (\bar{u}_j^\lambda \gamma^5 u_j^\lambda) - \frac{ig}{2} \frac{m_h}{M} \phi^0 (\bar{d}_j^\lambda \gamma^5 d_j^\lambda) \end{aligned}$$



# Mekaniska vågor: Vågekvationen



Vågfunktionen:

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Hastighet och acceleration:

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

$$a_y(x, t) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(kx - \omega t) = -\omega^2 y(x, t)$$

Krökningen:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = -k^2 A \cos(kx - \omega t) = -k^2 y(x, t)$$

$$v = \lambda / T = \omega / k$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t) / \partial t^2}{\partial^2 y(x, t) / \partial x^2} = \frac{\omega^2}{k^2} = v^2$$

Vågekvationen:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$



# Mekaniska vågor: Vågekvationen



Vågekvationen: 
$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

Vågekvationen beskriver också vågor som inte är sinusformade !

Den beskriver till och med vågor som inte är periodiska !

Och vågor i tre dimensioner !



# Mekaniska vågor Problem



## Del 6. Problem lösning

$$\frac{1}{n} \sin x = ?$$

$$\frac{1}{n} \cancel{\sin} x =$$

$$six = 6$$



## Mekaniska vågor Problem



Du viftar med ett rep upp och ner och skapar en sinusvåg med frekvensen 2.00 Hz, amplituden 0.075 m och våghastigheten 12.0 m/s.

Beräkna perioden, våglängden, vinkelfrekvensen och vågtalet !

**Givet:**

$$A: \text{Amplitude} = 0.075 \text{ m}$$

$$f: \text{Frequency} = 1 / T = 2.00 \text{ Hz}$$

$$v: \text{Wave speed} = \lambda / T = 12.0 \text{ m/s}$$

**Att beräkna:**

$$T: \text{Period} = 1 / f = 0.5 \text{ s}$$

$$\lambda: \text{Wavelength} = v T = 6.00 \text{ m}$$

$$\omega: \text{Angular frequency} = 2 \pi f = 4\pi$$

$$k: \text{Wave number} = 2 \pi / \lambda = \frac{1}{3}\pi$$



## Mekaniska vågor Problem



Vid  $t = 0$  befinner sig repet du håller i handen ( $x=0$ ) i sitt högsta läge (0.075 m).

Vad är vågfunktionen för svängningarna ?

Vad blir vågfunktionen för  $x = 0$  och  $x = 3.00 \text{ m}$  ?

**Beräknat tidigare:**

$$\omega: \text{Angular frequency} = 2 \pi f = 4\pi$$

$$k: \text{Wave number} = 2 \pi / \lambda = \frac{1}{3}\pi$$

$$y(x,t) = A \cos(kx - \omega t) = 0.075 \cos(\frac{1}{3}\pi x - 4\pi t)$$

$$y(0,t) = 0.075 \cos(-4\pi t) = 0.075 \cos(4\pi t)$$

$$y(3,t) = 0.075 \cos(\pi - 4\pi t) = -0.075 \cos(4\pi t)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$



# Del 7. Våg hastighet och sträng egenskaper



<https://www.youtube.com/watch?v=ttgLyWFINJI>



**Mål:**

Ta reda på hur våghastigheten beror på  
strängens egenskaper !

**Hur:**

Titta på krafterna på ett litet sträng  
segment och sedan använda Newtons lag:

$$F = m a$$



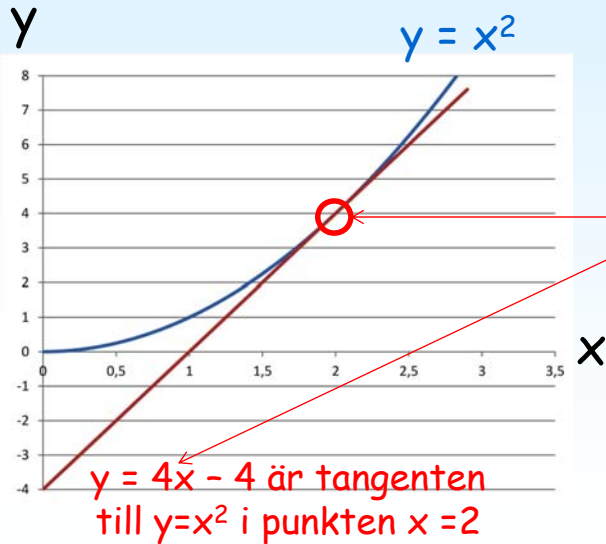


# Mekaniska vågor

## Våg hastighet



Först lite repetition av derivatans innebörd.  
Med funktionen  $y = x^2$  som exempel!



$$y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \text{ for } x = 2$$

Derivatans ger lutningen av tangenten till funktionen som har deriverats.

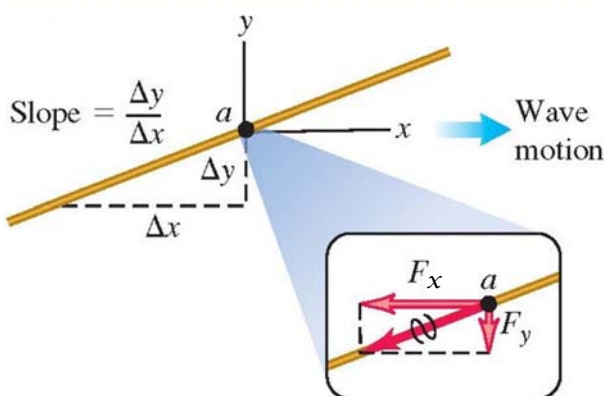


# Mekaniska vågor

## Våg hastighet



Vi börjar med att titta på krafterna i en punkt på strängen!



Förhållandet mellan kraften i y-riktningen till kraften i x-riktningen ges av strängens lutning som ges av derivatan:

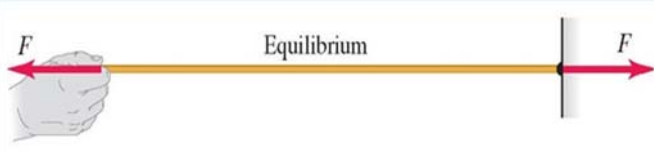
$$\text{Slope} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F_y}{F_x} = \frac{dy}{dx}$$

$$F_y(x, t) = -F_x \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$$



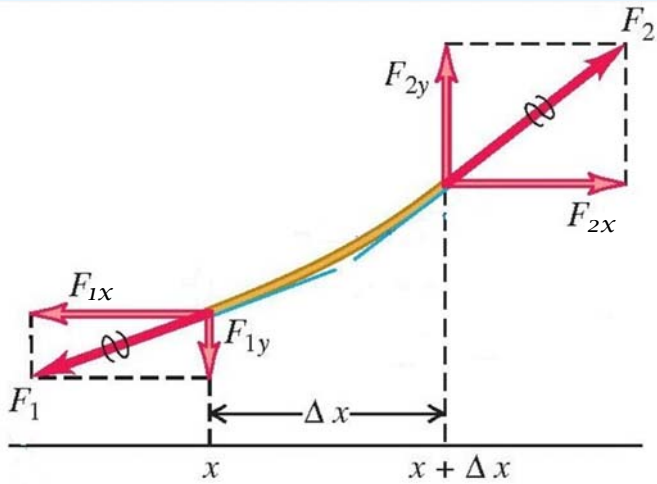
# Mekaniska vågor

## Våg hastighet



När strängen är **i vila** finns bara en kraft i x-riktningen:  
**Spännkraften (F).**

Sedan tittar vi på krafterna i ett segment av strängen :



När en **transversell våg** passerar strängen kommer den röra sig upp och ner men inte sidledes dvs kraften i x-riktningen blir fortfarande = spännkraften:

$$F_{1x} = -F_{2x} = F$$

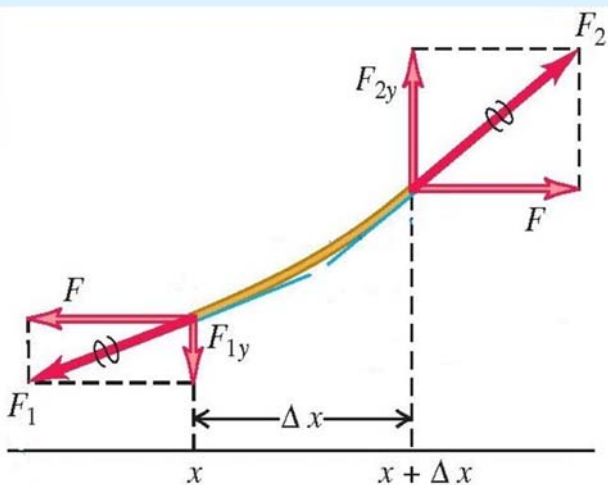


# Mekaniska vågor

## Våg hastighet



Dags att använda derivatan i ändpunkterna:



$$\frac{F_{1y}}{F} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$$

$$\frac{F_{2y}}{F} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

Den totala kraften i y-riktningen blir då:

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = F \left[ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x \right]$$

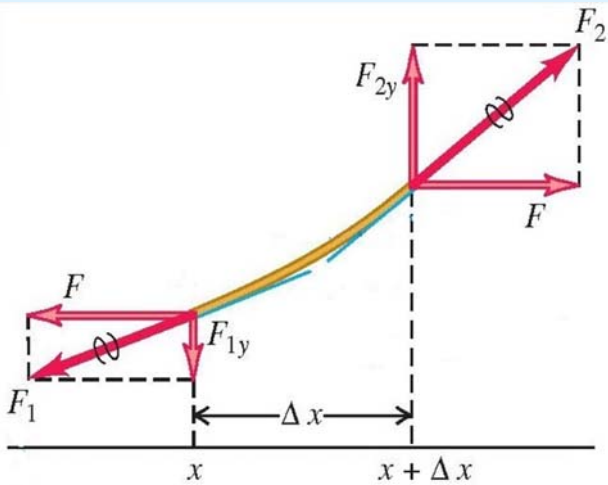


# Mekaniska vågor

## Våg hastighet



Låt oss införa massan av strängen och använda Newtons lag:



$\mu$ : Strängens massa per längdenhet.

$m = \mu \Delta x$  är massan av sträng elementet.

$F = m a$  (Newtons lag) där accelerationen är andra derivatan med avseende på tiden.

$$F_y = F \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right] = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$F = m a$$



# Mekaniska vågor

## Våg hastighet



Vår nya ekvation kan skrivas om:

$$F \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right] = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \xrightarrow{\text{Dividera med } F\Delta x} \quad \frac{\left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_x}{\Delta x} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

När  $\Delta x$  går mot noll är detta ekvivalent med andra derivatan med avseende på  $x$ .

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

+

Man kan nu kombinera denna ekvation med vågekvationen:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

=

Resultatet är att våghastigheten blir:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$



# Mekaniska vågor

## Våg hastighet

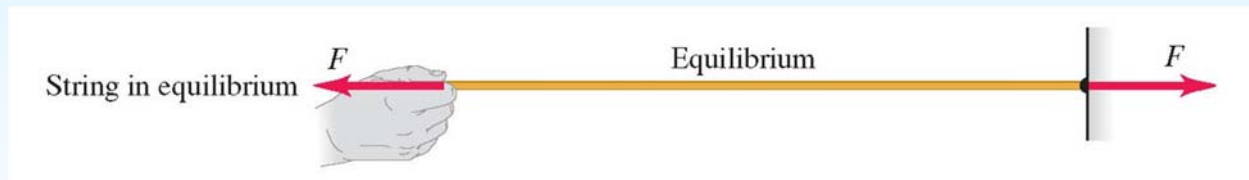


Slutsats: Våghastigheten beror på två saker:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

← Spännkraften

← Strängens massa per längdenhet



Mer generellt:

$$v = \sqrt{\frac{\text{Restoring force returning the system to equilibrium}}{\text{Inertia resisting the return to equilibrium}}}$$



# Mekaniska vågor

## Problem



# Del 8. Problem lösning

$$\frac{1}{n} \sin x = ?$$

$$\cancel{\frac{1}{n}} \cancel{\sin} x =$$

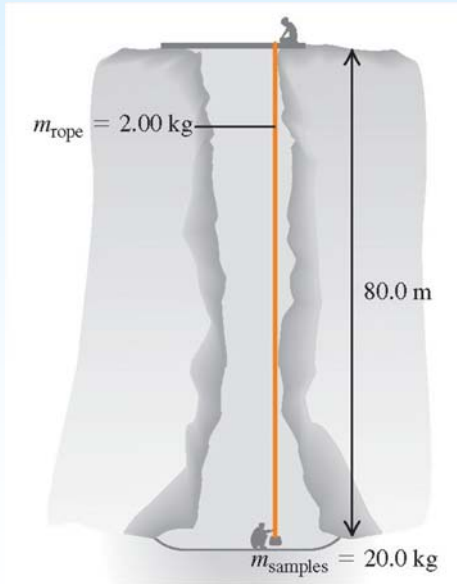
$$six = 6$$



# Mekaniska vågor Problem



Mannen i hålet skickar en signal genom att göra en knyck på ett rep i vars ände det hänger 20 kg. Vad blir hastigheten av vågen i repet? Om repet sätts i sinus svängning med  $f=2\text{Hz}$  hur många perioder får plats på repet?



The tension in the rope due to the box is

$$F = m_{\text{box}}g = (20.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 196 \text{ N}$$

and the rope's linear mass density is

$$\mu = \frac{m_{\text{rope}}}{L} = \frac{2.00 \text{ kg}}{80.0 \text{ m}} = 0.0250 \text{ kg/m}$$

the wave speed is

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{196 \text{ N}}{0.0250 \text{ kg/m}}} = 88.5 \text{ m/s}$$

the wavelength is

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{88.5 \text{ m/s}}{2.00 \text{ s}^{-1}} = 44.3 \text{ m}$$

There are  $(80.0 \text{ m})/(44.3 \text{ m}) = 1.81$  wavelengths (that is, cycles of the wave) in the rope.



# Mekaniska vågor Effekt



## Del 9. Effekt = Arbete per tidsenhet



Bugatti Veyron

Effekt = 1200 hästkrafter

Effekt = 880 kW

Effekt = 880 kJ/s



# Mekaniska vågor

## Effekt



**Vågens effekt (P):** Den momentana hastigheten med vilken energi transporteras av vågen. (P = energi per tidsenhet)

Unit: W or J/s

**Våg intensitet (I):** Medeleffekten som passerar en yta vinkelrät mot vågens riktning. (I = effekt per ytenhet).

Unit: W/m<sup>2</sup>

$$I = P_{av} / A_{area}$$

Allmänt för effekt:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (\text{instantaneous rate at which force } \vec{F} \text{ does work on a particle})$$

Vågens effekt (P):

$$P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t)$$

y är den enda riktningen där hastigheten inte är noll



# Mekaniska vågor

## Effekt



$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

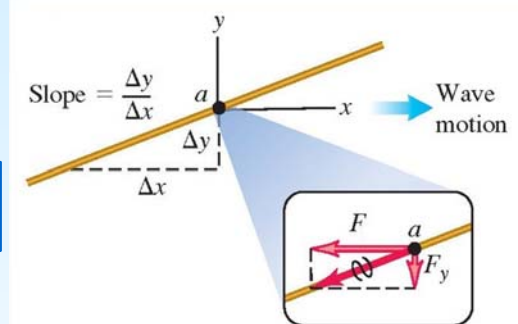
$$P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t)$$

$$F_y(x, t) = -F \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$$

$$P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t) = -F \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$$

**Vågens effekt:**

$$P(x, t) = Fk\omega A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$



$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

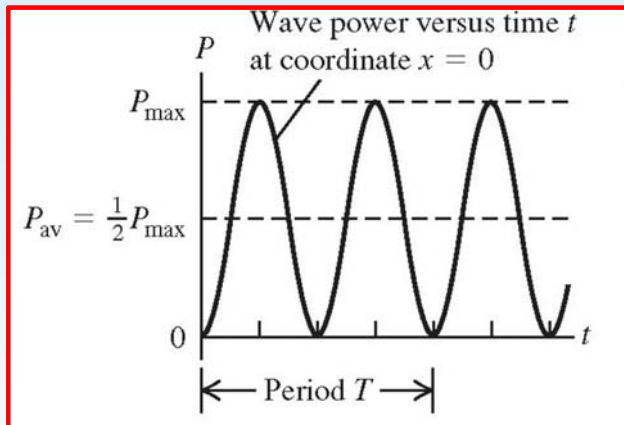
$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = -kA \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$



# Mekaniska vågor

## Effekt



**Vågens effekt:**

$$P(x, t) = Fk\omega A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

$$P_{max} = Fk\omega A^2 = \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$v = \frac{\omega}{k}$$

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

$$P_{av} = \frac{1}{2} Fk\omega A^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$$



# Mekaniska vågor

## Problem



# Del 10. Problem lösning

$$\frac{1}{n} \sin x = ?$$

$$\frac{1}{n} \cancel{\sin} x =$$

$$six = 6$$



## Mekaniska vågor Problem



Du viftar med ett rep upp och ner och skapar en sinusvåg med frekvensen 2.00 Hz, amplituden 0.075 m och våghastigheten 12.0 m/s. Repet väger 250 gram per meter och är spänt med kraften 36.0 N.

Beräkna den maximala effekten och medeleffekten som behövs !

A: Amplitude = 0.075 m

f: Frequency =  $1 / T = 2.00$  Hz

v: Wave speed =  $\lambda / T = 12.0$  m/s

T: Period =  $1 / f = 0.5$  s

$\lambda$ : Wavelength =  $v T = 6.00$  m

$\omega$ : Angular frequency =  $2 \pi f = 4\pi$

k: Wave number =  $2 \pi / \lambda = 1/3\pi$

$\mu$ : Linear mass density = 0.250 kg/m

F: Tension = 36.0 N

**Lösning:**

$$\begin{aligned} P_{\max} &= \sqrt{\mu F \omega^2 A^2} \\ &= \sqrt{(0.250 \text{ kg/m})(36.0 \text{ N})(4.00\pi \text{ rad/s})^2(0.075 \text{ m})^2} \\ &= 2.66 \text{ W} \end{aligned}$$

$$P_{\text{av}} = \frac{1}{2} P_{\max} = \frac{1}{2} (2.66 \text{ W}) = 1.33 \text{ W}$$



## Mekaniska vågor Intensitet



# Del 11. Intensitet = effekt per ytenhet



En stor Tsunami kan ha en effekt som är 1 MW per meter strand





# Mekaniska vågor

## Intensitet



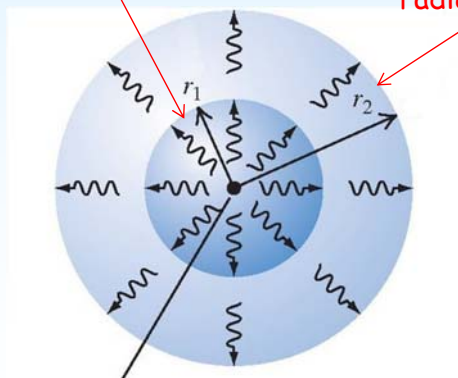
**Våg intensitet (I):** Hastigheten med vilken vågen transporterar energi genom en yta vinkelrät mot vågens färdriktning (I = Medeleffekt per ytenhet = energi per tids och ytenhet).  
Unit:  $W/m^2 = J/s/m^2$

$$I = P_{av} / A_{area}$$

$$P_{av} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$$

Sfär med radien  $r_1$

Sfär med radien  $r_2$



Källa med medeleffekten  $P_{av}$

Intensiteten genom en sfär med radien  $r_1$

$$I_1 = \frac{P_{av}}{4\pi r_1^2}$$

Om man bortser från effektförluster

$$4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

(inverse-square law for intensity)



# Mekaniska vågor

## Problem



# Del 12. Problem lösning

$$\frac{1}{n} \sin x = ?$$

$$\frac{1}{n} \cancel{\sin} x =$$

$$six = 6$$



## Mekaniska vågor Problem



En siren skickar ut ljud vågor likformigt i alla riktningar.  
Ljudintensiteten är  $0.250 \text{ W/m}^2$  på ett avstånd av  $15.0 \text{ m}$ .

På vilket avstånd är intensiteten  $0.010 \text{ W/m}^2$  ?

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (\text{inverse-square law for intensity})$$

$$r_2 = r_1 \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = (15.0 \text{ m}) \sqrt{\frac{0.250 \text{ W/m}^2}{0.010 \text{ W/m}^2}} = 75.0 \text{ m}$$



## Mekaniska vågor Reflektioner



# Del 13. Reflektion av vågor





# Mekaniska vågor

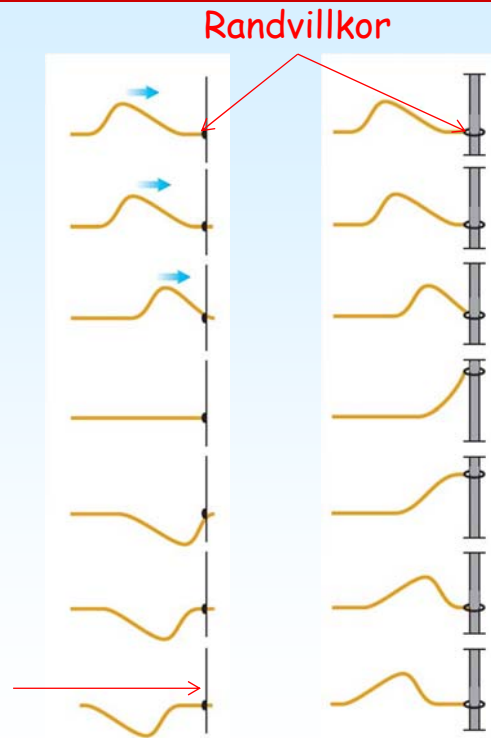
## Reflektioner



### Reflektion av en våg



Ställningen orsakar en motriktad kraft som inverterar vågen.



# Mekaniska vågor

## Reflektioner



Vågfunktionen av två vågor ges typiskt av summan av de två individuella vågfunktionerna.

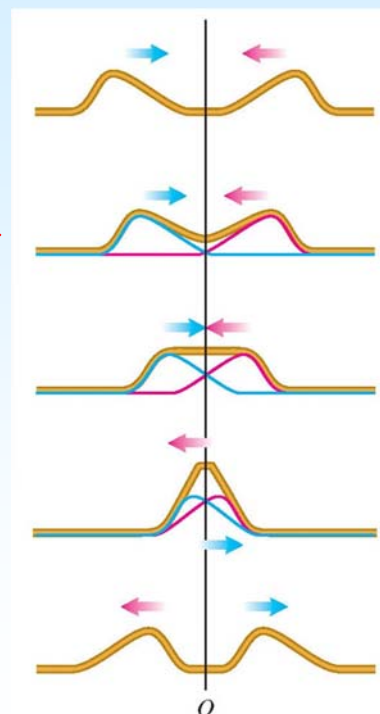
$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

Detta kallas för **superpositions principen** !

Denna princip gäller när vågekvationen för vågorna är linjär dvs den innehåller bara funktionen  $y(x,t)$  till första ordningen.

Sinusvågor t.ex. följer superpositions principen för deras vågekvation är linjär:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$





# Mekaniska vågor Reflektioner



Manual Restart Fixed End  
Oscillate Loose End  
Pulse No End

Slow Motion  
Normal

Damping Tension  
None Lots Low High

Rulers  
Timer  
Reference Line

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

<https://phet.colorado.edu/en/simulation/wave-on-a-string>



# Mekaniska vågor: Stående vågor



## Del 14. Stående vågor



<https://www.youtube.com/watch?v=NpEevfOU4Z8>



# Mekaniska vågor: Stående vågor



<https://www.youtube.com/watch?v=-gr7KmTOrx0>

Vincent Hedberg - Lunds Universitet

57



# Mekaniska vågor: Stående vågor



Manual  Restart  
Oscillate   
Pulse

Fixed End   
Loose End   
No End

Slow Motion   
Normal

Amplitude: 0.61 cm  
Frequency: 0.35 Hz  
Damping: None to Lots  
Tension: Low to High

Rulers  
 Timer  
 Reference Line

Vincent Hedberg - Lunds Universitet

58

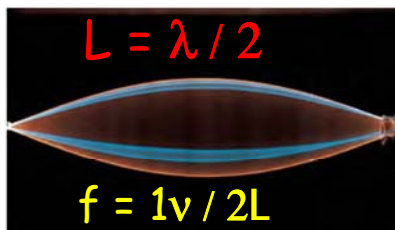


# Mekaniska vågor: Stående vågor

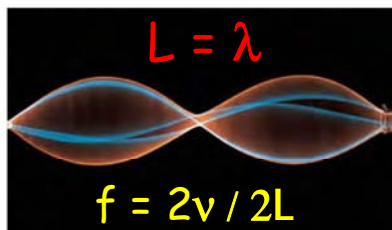


$L =$  längden av strängen

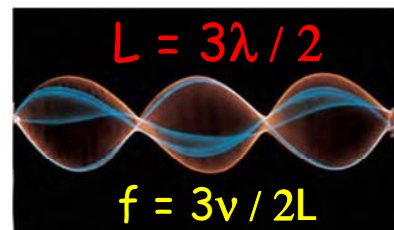
(a) String is one-half wavelength long.



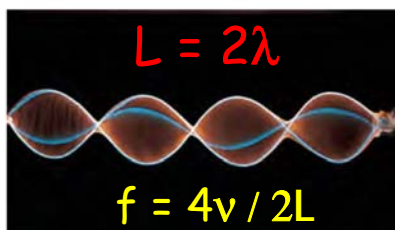
(b) String is one wavelength long.



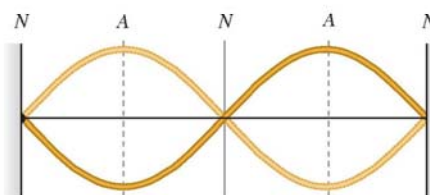
(c) String is one and a half wavelengths long.



(d) String is two wavelengths long.



$$f = v / \lambda$$



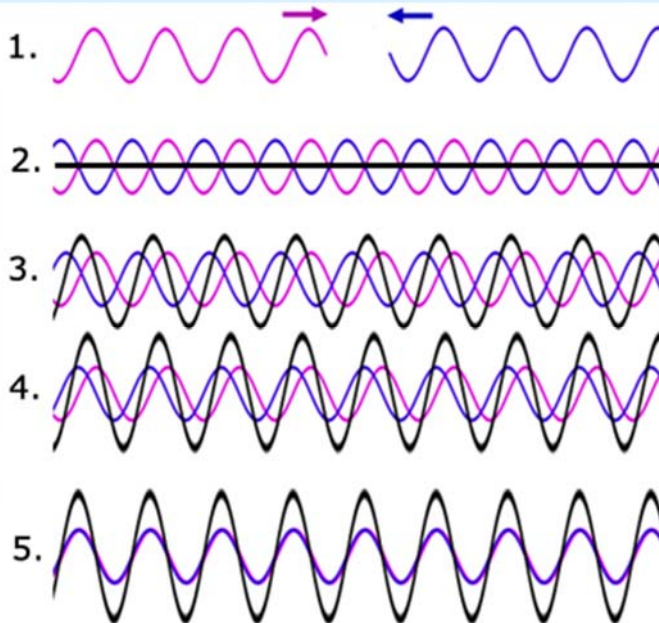
$N =$  nodes: points at which the string never moves

$A =$  antinodes: points at which the amplitude of string motion is greatest

Nod Antinod Nod Antinod Nod



# Mekaniska vågor: Stående vågor



$$\leftarrow y_1(x, t) = -A \cos(kx + \omega t)$$

$$\rightarrow y_2(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Vid olika  
tidpunkter

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[-\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)]$$



# Mekaniska vågor: Stående vågor



Superposition av två vågor:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[-\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)]$$

+

Trigonometri:  $\cos(a \mp b) = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b$

=

~~$$Y(x, t) = A[-\cos(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\sin(\omega t) + \cos(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\sin(\omega t)]$$~~

=

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 2A \sin kx \sin \omega t$$



# Mekaniska vågor: Stående vågor



Vad är hastigheten och accelerationen ?

Vågfunktion:

$$y(x, t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t)$$

Hastighet:

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$$



$$v_y(x, t) = 2A\omega \sin(kx) \cos(\omega t)$$

Acceleration:

$$a_y(x, t) = \frac{\partial v_y(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$



$$a_y(x, t) = -2A\omega^2 \sin(kx) \sin(\omega t)$$



# Mekaniska vågor: Stående vågor



$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 2A \sin kx \sin \omega t$$

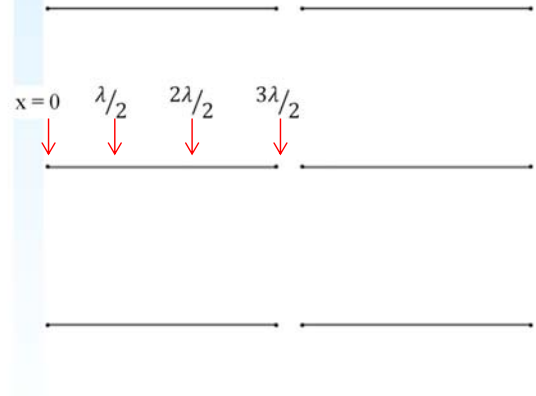
Noderna ges av  $\sin(kx) = 0$

$$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi,$$

$$x = 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \frac{4\pi}{k},$$

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{4\lambda}{2}, \quad \text{eftersom } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$x = 0, \frac{v}{2f}, \frac{2v}{2f}, \frac{3v}{2f}, \frac{4v}{2f}, \quad \text{eftersom } \lambda = \frac{v}{f}$$



# Mekaniska vågor: Sträng instrument



## Del 15. Sträng instrument

Octobas  
fiol



<https://www.youtube.com/watch?v=12X-i9YHzmE>





# Mekaniska vågor: Sträng instrument



Strängar med längden  $L$   
som har noder i båda ändar:

Nodes when  
 $\sin(kx) = 0$

$$x = 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \dots$$

$$= 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots$$

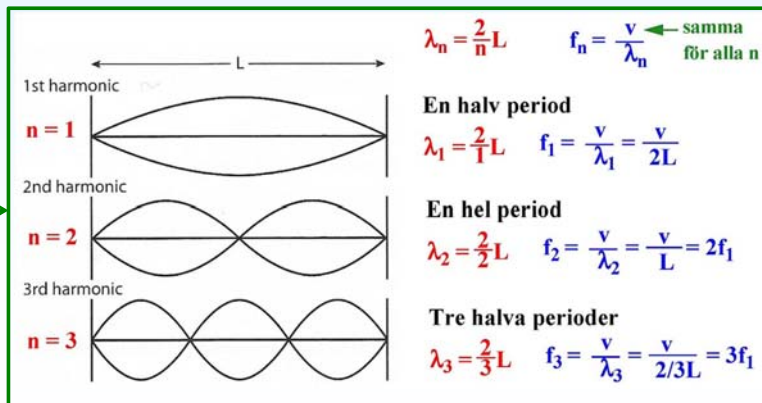
$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\lambda = v / f = 2L / n$$

$$f_n = n \frac{v}{2L} = n f_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$f_1, f_2, f_3, \dots$  Harmoniska frekvenser  
 $f_1$ : Grundfrekvensen  
 $f_2, f_3, f_4, \dots$  Övertoner



# Mekaniska vågor: Sträng instrument



$$f_1 = v / 2L$$

$$v = \sqrt{F/\mu}$$

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Lång sträng:      Låg frekvens  
Tjock sträng:    Låg frekvens  
Stor spännkraft:    Hög frekvens



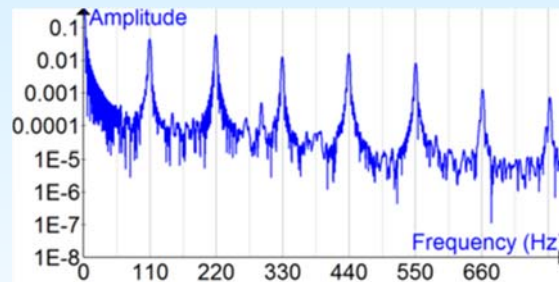


# Mekaniska vågor: Sträng instrument

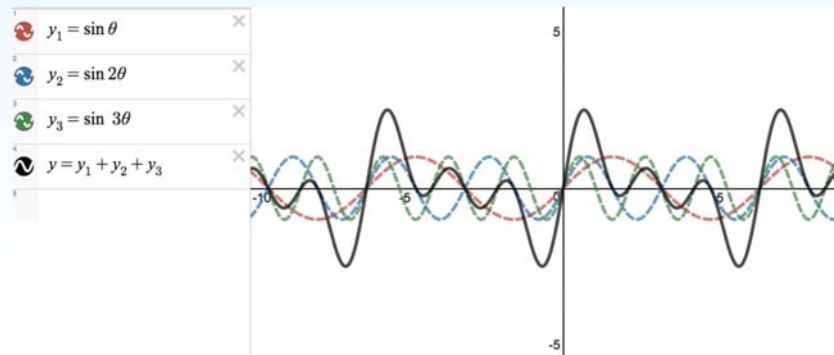


En sträng i ett sträng instrument producerar normalt inte bara en grundfrekvens men en överlagring av alla harmoniska frekvenser.

Amplituden för de olika frekvenserna varierar:



Den resulterande vågen har ett komplicerat utseende:



# Mekaniska vågor: Sträng instrument



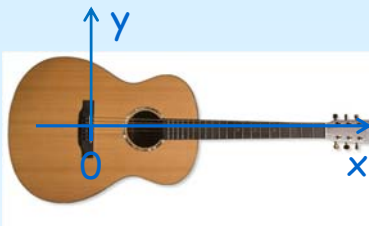


## Del 16. Problem lösning

$$\frac{1}{n} \sin x = ?$$

$$\frac{1}{n} \cancel{\sin} x =$$

$$six = 6$$



En sinusvåg rör sig i negativ x-riktning längs en gitarr sträng med hastigheten 143 m/s. Amplituden är 0.750 mm och frekvensen 440 Hz.

Vågen reflekteras vid  $x=0$  och bildar en stående våg.

Vad blir funktionen som beskriver strängens rörelse i y-led ?

$$y(x,t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t)$$

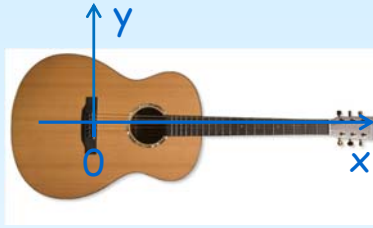
$$A = 0.750 \text{ mm} = 7.50 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\omega = 2\pi f = (2\pi \text{ rad})(440 \text{ s}^{-1}) = 2760 \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2760 \text{ rad/s}}{143 \text{ m/s}} = 19.3 \text{ rad/m}$$



## Mekaniska vågor Problem



$$\begin{aligned}v &= 143 \text{ m/s} \\f &= 440 \text{ Hz} \\A &= 0.075 \text{ m} \\ \omega &= 2760 \text{ rad/s} \\k &= 19.3 \text{ rad/m}\end{aligned}$$

Var blir det noder på strängen ?

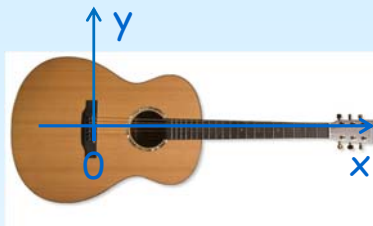
Det blir noder för  $X = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots$

$$f = v / \lambda \Rightarrow \lambda = v / f = 143 / 440 = 0.325 \text{ m}$$

det blir noder för  $x = 0, 0.163 \text{ m}, 0.325 \text{ m},$



## Mekaniska vågor Problem



$$\begin{aligned}v &= 143 \text{ m/s} \\f &= 440 \text{ Hz} \\A &= 0.075 \text{ m} \\ \omega &= 2760 \text{ rad/s} \\k &= 19.3 \text{ rad/m}\end{aligned}$$

Vad blir amplituden av den stående vågen ?

Vad blir den maximala hastigheten och den maximala accelerationen ?

$$y(x,t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t) \quad \text{Amplitud} = 2A = 0.15 \text{ m}$$

$$v_y(x,t) = 2A\omega \sin(kx) \cos(\omega t)$$

$$v_{y(x,t)\text{max}} = 2A\omega = 4.14 \text{ m/s}$$

$$a_y(x,t) = -2A\omega^2 \sin(kx) \sin(\omega t)$$

$$a_{y(x,t)\text{max}} = 2A\omega^2 = 11426 \text{ m/s}^2$$



# Mekaniska vågor Problem



En octobas fiol har en sträng som är 5.00 m lång och som väger 40.0 gram per meter.

Vilken spännkraft behövs för att grundfrekvensen ska bli 20.0 Hz ?

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$



$$F = 4\mu L^2 f_1^2 = 4(40.0 \times 10^{-3} \text{ kg/m})(5.00 \text{ m})^2 (20.0 \text{ s}^{-1})^2 = 1600 \text{ N}$$



# Mekaniska vågor Problem



$f_1 = 20.0 \text{ Hz}$   
 $L = 5.00 \text{ m}$   
 $\mu = 40.0 \text{ g/m}$   
 $F = 1600 \text{ N}$

Vad blir frekvensen och våglängden för den andra harmoniska frekvensen ?

Vad blir frekvensen och våglängden för den andra övertonen ?

$$f_n = n \frac{v}{2L} = n f_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$f_2 = 2f_1 = 2(20.0 \text{ Hz}) = 40.0 \text{ Hz}$$

$$\lambda_2 = \frac{2L}{2} = \frac{2(5.00 \text{ m})}{2} = 5.00 \text{ m}$$

Den andra övertonen är den andra över grundfrekvensen d.v.s.  $n = 3$

$$f_3 = 3f_1 = 3(20.0 \text{ Hz}) = 60.0 \text{ Hz}$$

$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = \frac{2(5.00 \text{ m})}{3} = 3.33 \text{ m}$$



# Mekaniska vågor Problem



$$\begin{aligned}f_1 &= 20.0 \text{ Hz} \\L &= 5.00 \text{ m} \\ \mu &= 40.0 \text{ g/m} \\ F &= 1600 \text{ N}\end{aligned}$$

Strängen vibrerar med sin grundfrekvens.

Vad blir frekvensen och våglängden av ljudet som den skickar ut ?

Ljudets hastighet är 344 m/s.

$$v = \lambda / T = \lambda f$$

$$\lambda = v / f$$

$$f = f_1 = 20.0 \text{ Hz}$$

$$\lambda_{1(\text{sound})} = \frac{v_{\text{sound}}}{f_1} = \frac{344 \text{ m/s}}{20.0 \text{ Hz}} = 17.2 \text{ m}$$