

Kapitel 36 - Diffraktion

Vincent Hedberg - Lunds Universitet

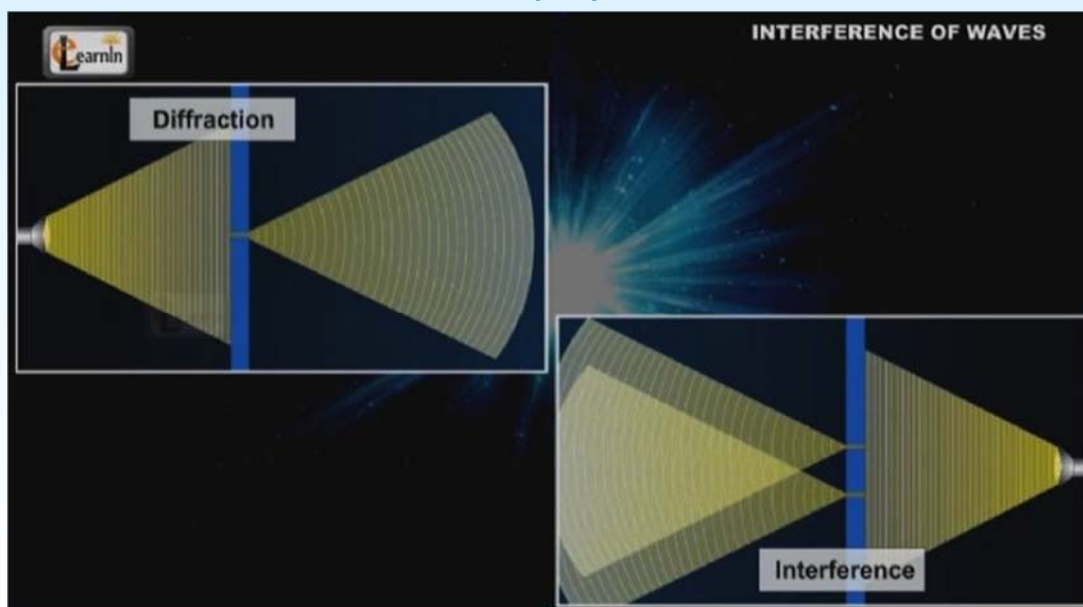
1



Diffraktion



Del 1. Diffraktion



<https://www.youtube.com/watch?v=C Ae3IkYNKt8>

Vincent Hedberg - Lunds Universitet

2



Diffraction



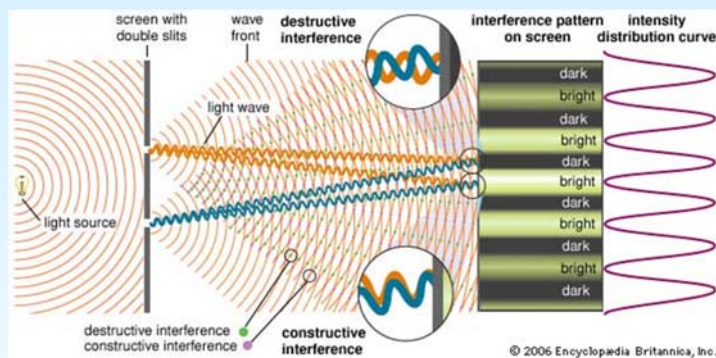
<https://www.youtube.com/watch?v=egRFqSKFmWQ>



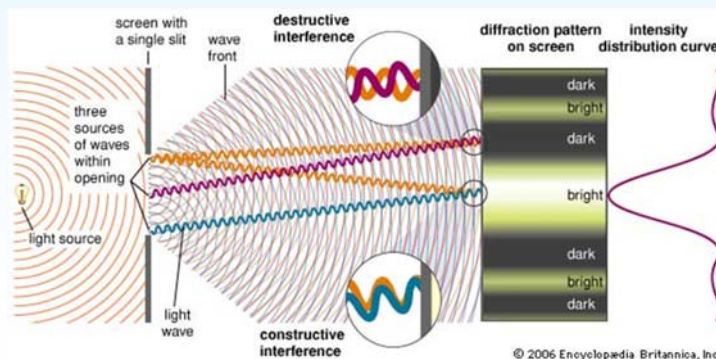
Diffraction



Interferens:
Dubbel spalt
experiment



Diffraction:
singel spalt
experiment

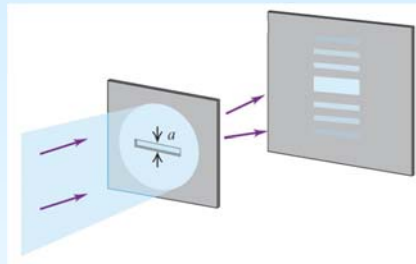




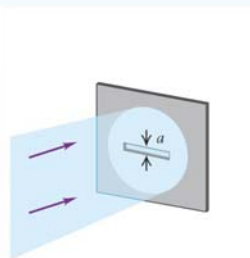
Diffraction



Fresnel
diffraction eller
närområds
diffraction.



Fraunhofer
diffraction eller
fjärrfälts
diffraction.



Linjerna till skärmen
antas vara parallella !

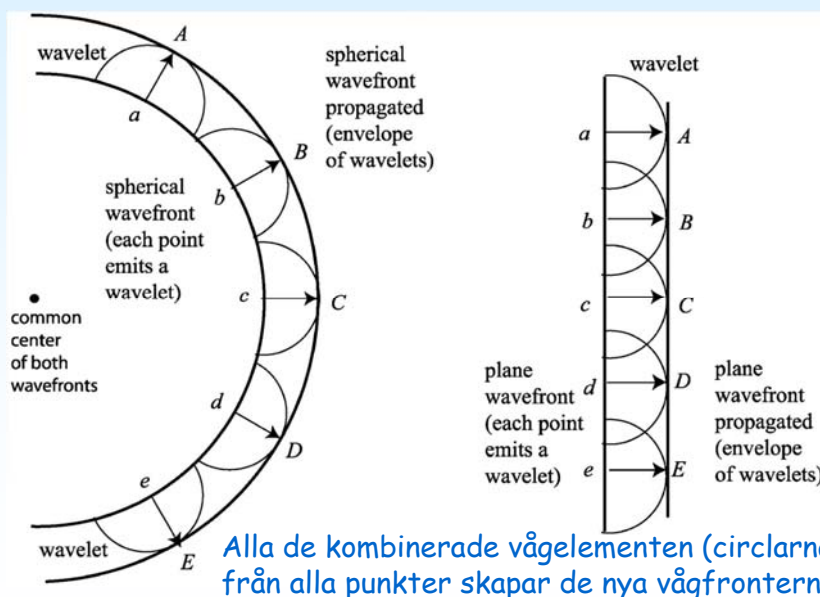


Diffraction



Huygens princip

Varje punkt i en vågfront betraktas som en ny källa till sekundära vågelement ("wavelets").



Huygen's Principle

$t = \delta$



Diffraction



Dela upp spalten i många små imaginära spalter

$a =$ spalt bredden

Plana vågor som träffar spalten

Varje imaginär spalt är en källa till sekundära vågelement (wavelets).



Diffraction



TRICKET: För varje punkt i den övre halvan av spalten finns en motsvarande punkt i den nedre halvan som den kan interferera med.

destruktiv interferens

θ

↑ $\frac{a}{2}$

↓ $\frac{\lambda}{2}$

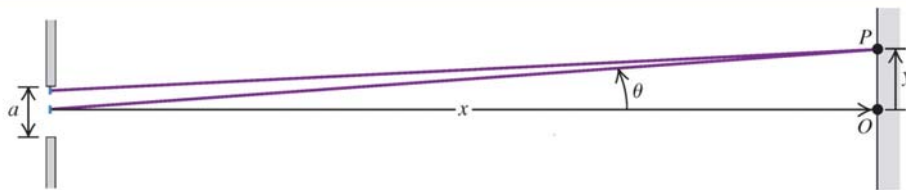
↑ δa

↓

cancels with



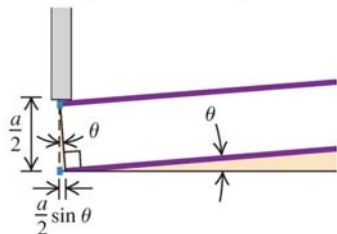
Diffraction



Geometri:

$$\tan(\theta) = y / x$$

Enlarged view of the top half of the slit



Destructiv Interferens:

$$\frac{a}{2} \sin \theta = \pm \frac{\lambda}{2} m$$

$$\sin(\theta) = m\lambda/a \quad m = \pm 1, \pm 2,$$

Små vinklar:

$$\tan(\theta) \approx \theta$$

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

$$y_m = x \frac{m\lambda}{a} \quad (\text{for } y_m \ll x)$$

$$m = \pm 1, \pm 2,$$



Diffraction



$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \approx \sin(\theta)$$

Destructiv Interferens:

$$y_m = x \frac{m\lambda}{a} \quad (\text{for } y_m \ll x)$$

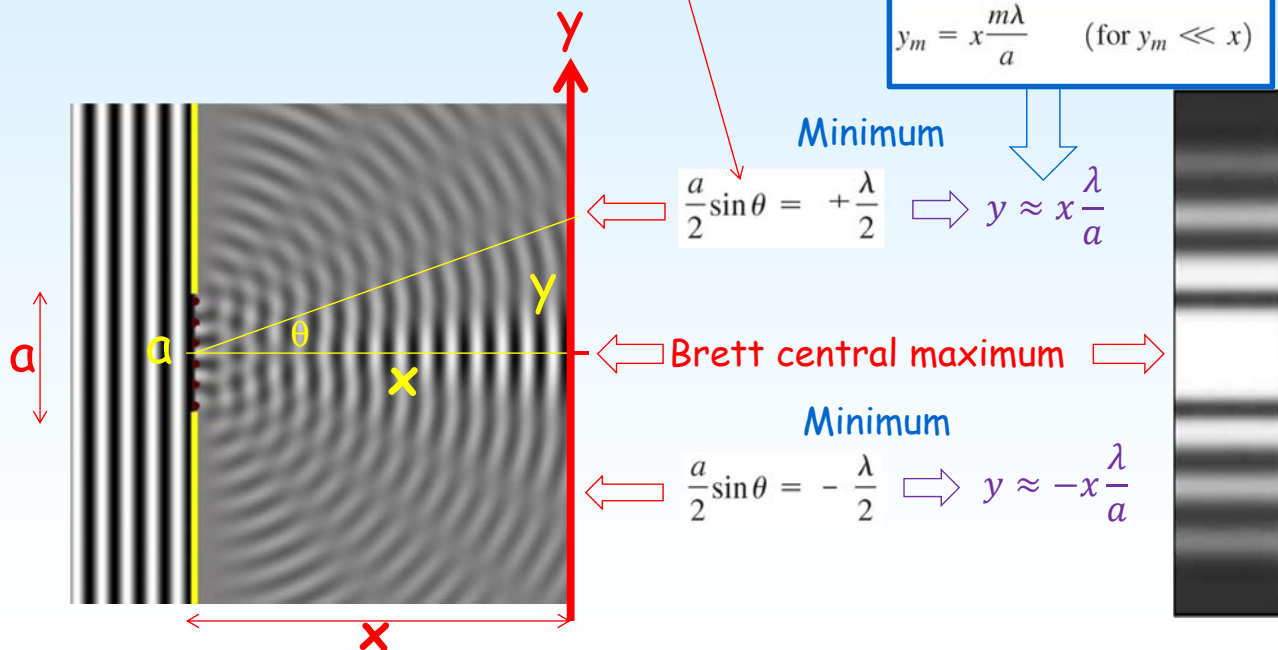
Minimum

$$\frac{a}{2} \sin \theta = + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow y \approx x \frac{\lambda}{a}$$

Brett central maximum

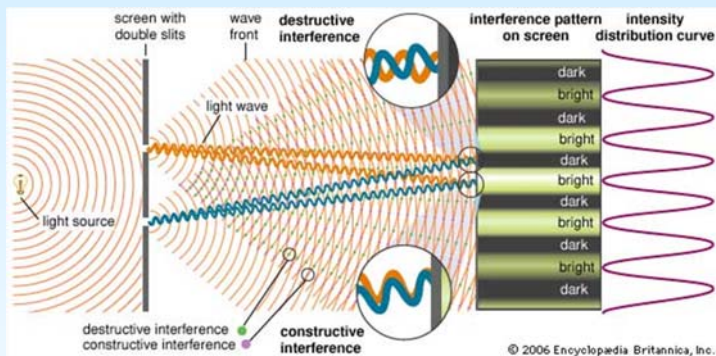
Minimum

$$\frac{a}{2} \sin \theta = - \frac{\lambda}{2} \Rightarrow y \approx -x \frac{\lambda}{a}$$





Diffraction

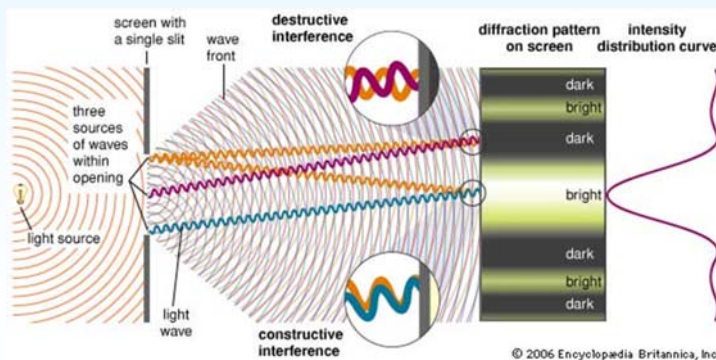


Ljusa band:

$$y_m = R \frac{m\lambda}{d}$$

Avstånd till skärmen (points to R)
 Våglängd (points to λ)
 Spalt avstånd (points to d)

$$m = 0, \pm 1, \pm 2,$$



Mörka band:

$$y_m = x \frac{m\lambda}{a}$$

Avstånd till skärmen (points to x)
 Våglängd (points to λ)
 Spalt bredd (points to a)

$$m = \pm 1, \pm 2,$$



Diffraction



<https://www.youtube.com/watch?v=9D8cPrEAGyc>

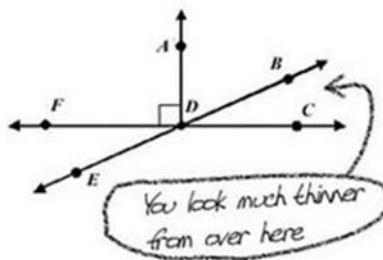


Diffraction Problem



Del 2. Problem lösning

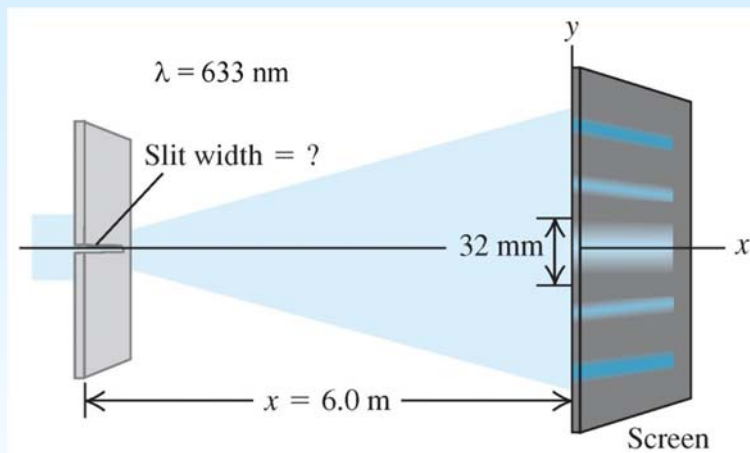
3. Name an angle complimentary to BDC:



Diffraction Problem



Hur bred är spalten ?



$$y_m = x \frac{m\lambda}{a}$$

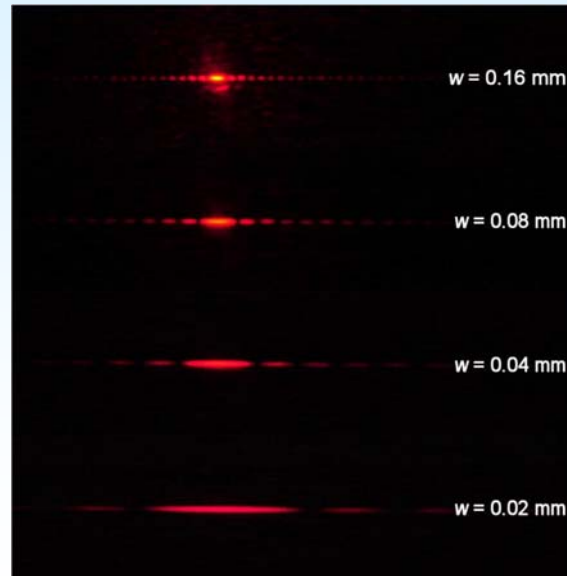
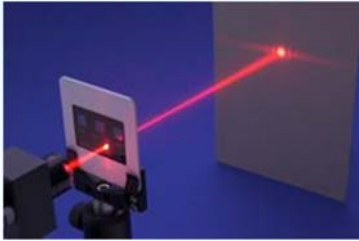


$$y = (32 \text{ mm})/2 = 16 \text{ mm}$$

$$a = \frac{x\lambda}{y} = \frac{(6.0 \text{ m})(633 \times 10^{-9} \text{ m})}{16 \times 10^{-3} \text{ m}} = 2.4 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.24 \text{ mm}$$



Del 3. Intensitet



Intensiteten hos ljus (I) är proportionell
mot kvadraten av amplituden hos det
totala elektriska fältet (E_p)

$$I \sim E_p^2$$

Så vad är E_p ?



Diffraktion Intensitet



Strategi för intensitets beräkningen

Uppgift 1:

Beräkna den totala elektriska fältstyrkan E_p av det elektriska fältet efter överlagringen av alla interfererande vågor genom att använda fasvektorer.

Uppgift 2:

Sätt in E_p i formeln:

$$I \sim E_p^2$$

Uppgift 3:

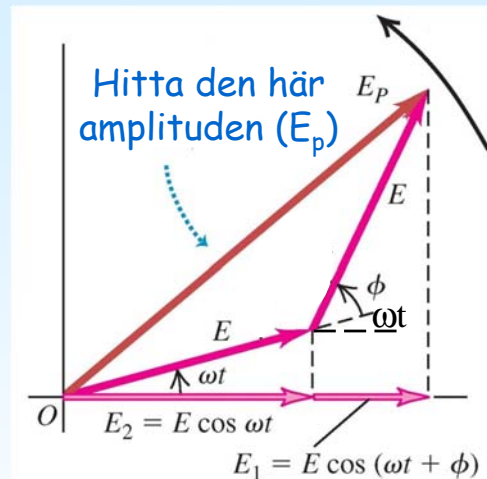
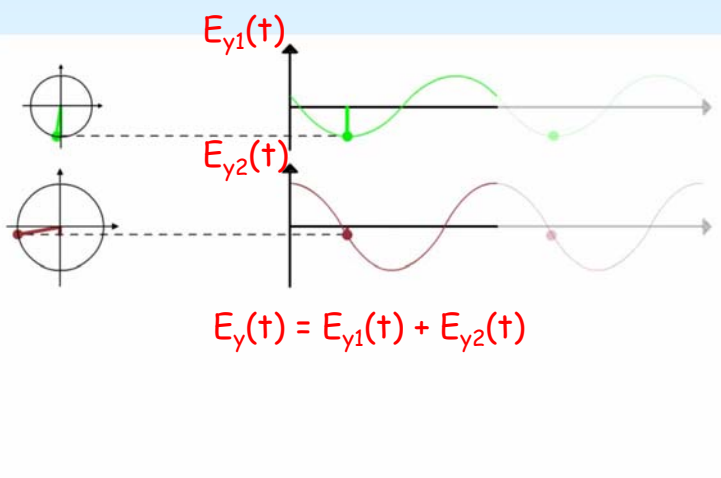
Härled ett förhållande mellan intensitet och a , γ , λ och x .



Interferens Fas vektorer



Interferens av två vågor



Den totala vågen beskrivs av projektionerna på x-axeln:

$$E_1(t) = E \cos(\omega t + \phi)$$

$$E_2(t) = E \cos \omega t$$

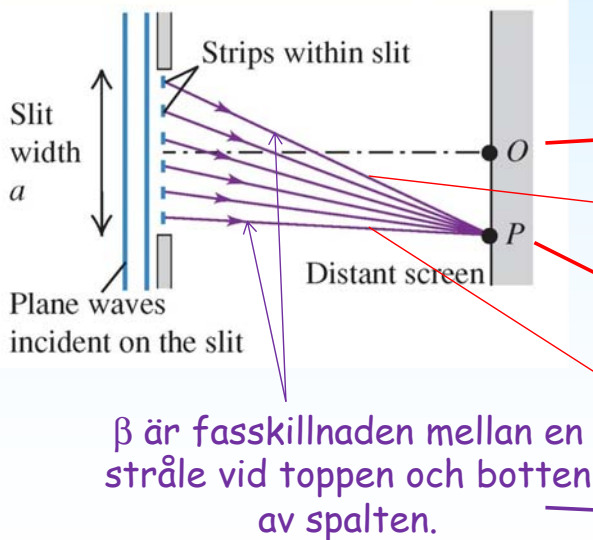
$$E(t) = E_1(t) + E_2(t)$$



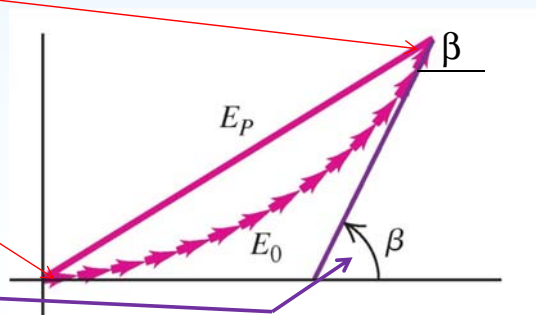
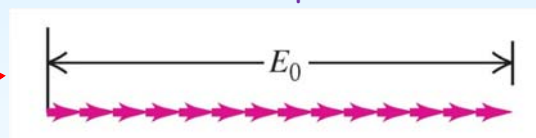
Diffraction Intensitet



Antag att många små fasvektorer med totala längden E_0 bygger upp den totala elektriska fältstyrkan (E_p) i punkten P



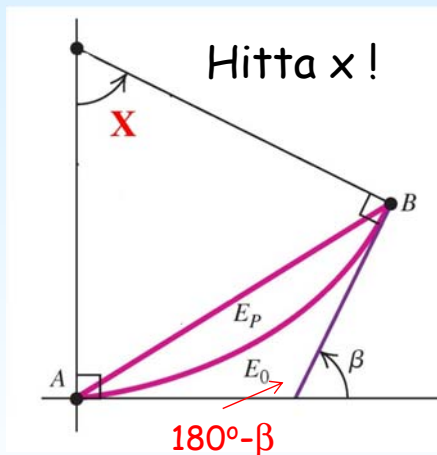
Fasskillnaden är noll rakt fram om strålarna är parallella:



Diffraction Intensitet



Steg 1

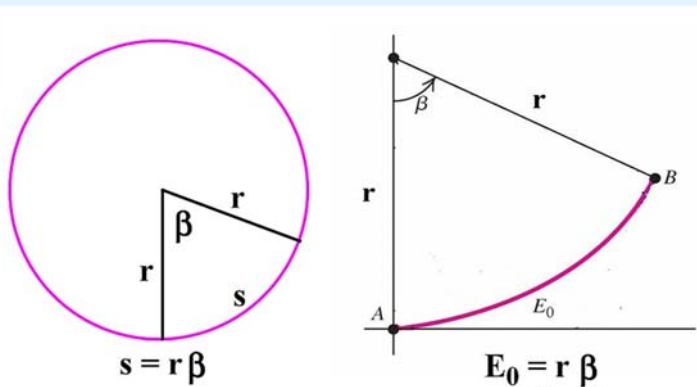


Fyrhörning = 360°
 $180^\circ - \beta + 90^\circ + X + 90^\circ = 360^\circ$

$X = \beta$

Steg 2

Hitta r från omkretsen av ett cirkel segment!



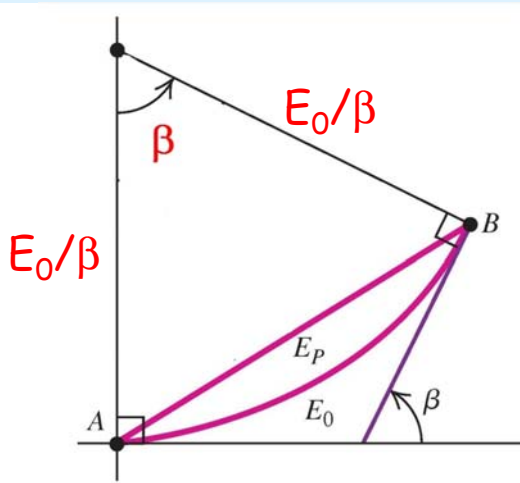
$r = E_0 / \beta$



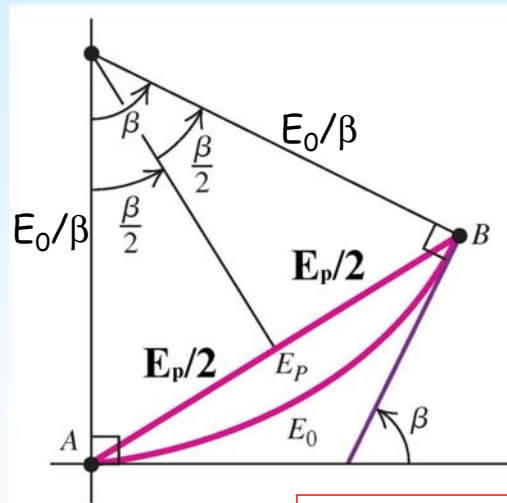
Diffraction Intensitet



Steg 1 & 2



Steg 3



Dela triangeln
i två halvor
och ta sinus:

$$\sin(\beta/2) = (E_P/2) / (E_0/\beta)$$

$$E_P = E_0 \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}$$



Diffraction Intensitet



$$I \sim E_P^2$$

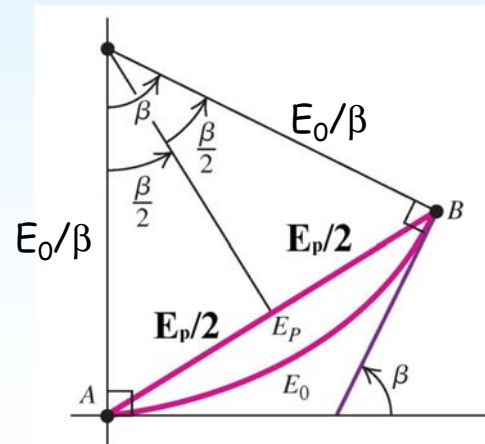
Intensitet

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$

$$E_P = E_0 \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}$$

Men vad är β ?

(fasförskjutningen mellan en
stråle från toppen och
botten av spalten)





Diffraktion Intensitet



Uppgift 1:

Beräkna den totala elektriska fältstyrkan E_p av det elektriska fältet efter överlagringen av alla interfererande vågor genom att använda fasvektorer.

$$E_p = E_0 \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}$$

Uppgift 2:

Sätt in E_p i formeln:

$$I \sim E_p^2$$

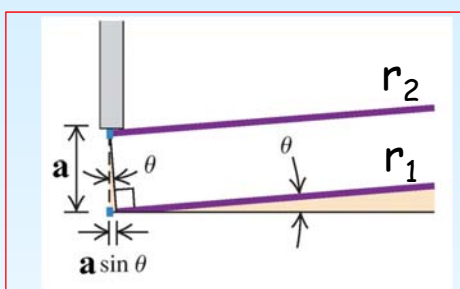
$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$

Uppgift 3:

Härled ett förhållande mellan intensitet och a , γ , λ och x .



Diffraktion Intensitet



Vägskillnaden:
 $r_2 - r_1 = a \sin(\theta)$

$r_2 - r_1$ är vägskillnaden mellan en stråle från toppen och botten av spalten.

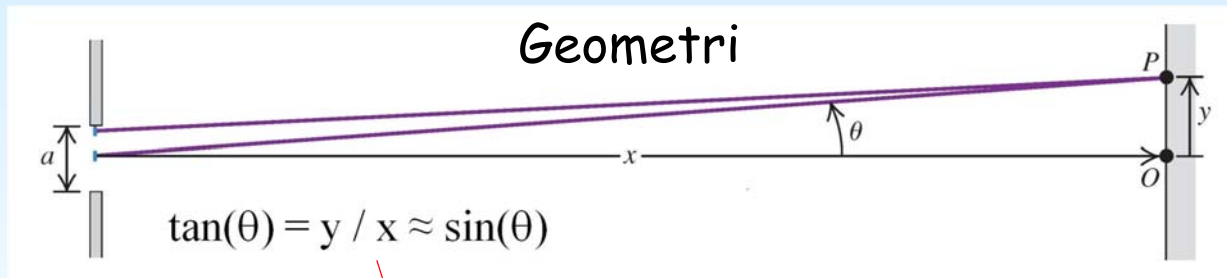
En vägskillnad av en våglängd motsvarar en fasskillnad på 2π

$$\frac{\beta}{2\pi} = \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$$



Diffraction Intensitet



$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$$

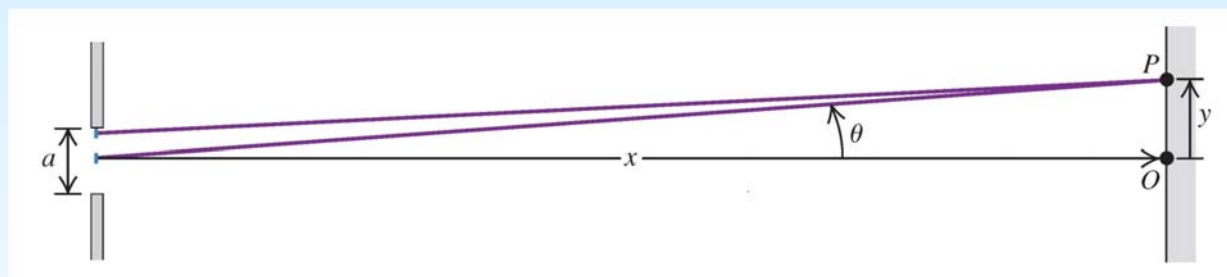
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\theta) \approx \frac{2\pi}{\lambda} a \frac{y}{x}$$



Diffraction Intensitet



Sammanfattning



$$I \sim E_p^2$$

$$E_p = E_0 \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}$$

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$

där

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\theta) \approx \frac{2\pi}{\lambda} a \frac{y}{x}$$



Diffraktion Intensitet



Uppgift 1:

Beräkna den totala elektriska fältstyrkan E_p av det elektriska fältet efter överlagringen av alla interfererande vågor genom att använda fasvektorer.

$$E_p = E_0 \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}$$

Uppgift 2:

Sätt in E_p i formeln:

$$I \sim E_p^2$$

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$

Uppgift 3:

Härled ett förhållande mellan intensitet och a , y , λ och x .

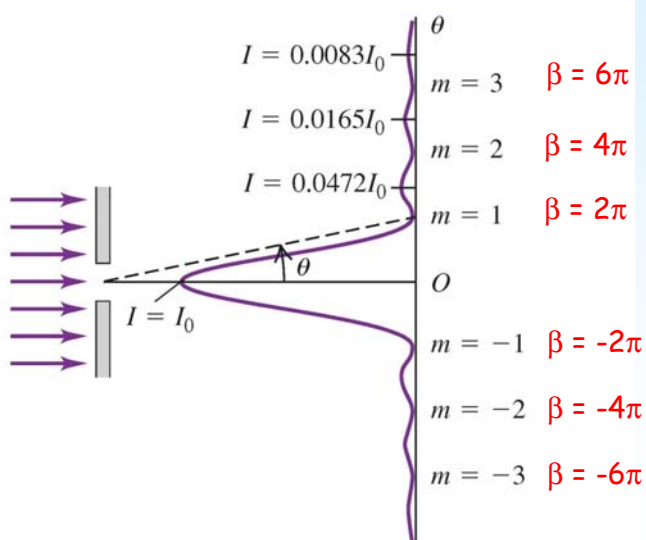
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\theta) \approx \frac{2\pi}{\lambda} a \frac{y}{x}$$



Diffraktion Intensitet



$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$



Destruktiv interferens:

Intensiteten har minimum för

$$0 = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$

$$0 = \sin^2(\beta/2)$$

$$0 = \sin(\beta/2)$$

går inte

$$\beta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots = \pm 2\pi m$$

Detta ger igen:

$$y_m = x \frac{m\lambda}{a}$$

Konstruktiv interferens:

Intensiteten har maximum för

$$\frac{dI}{d\beta} = 0$$

Men denna ekvation har inte en analytisk lösning.

Topparna är nära men inte exakt vid

$$\beta = 0, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \dots$$

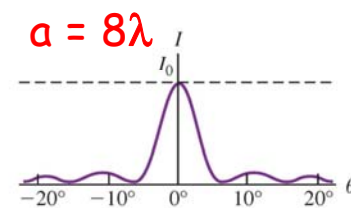
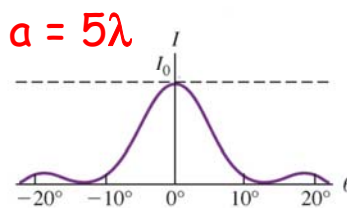
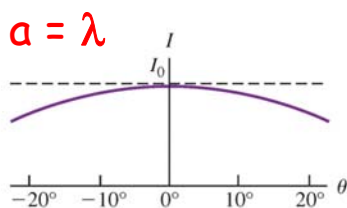
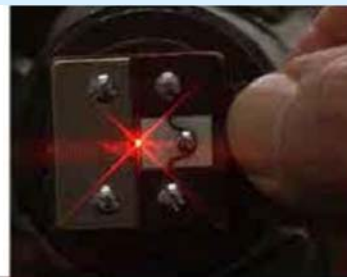


Diffraction Intensitet



$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 \quad \text{där} \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$$

Mörka band: $\sin(\theta) = m\lambda/a$
 $m = \pm 1, \pm 2,$

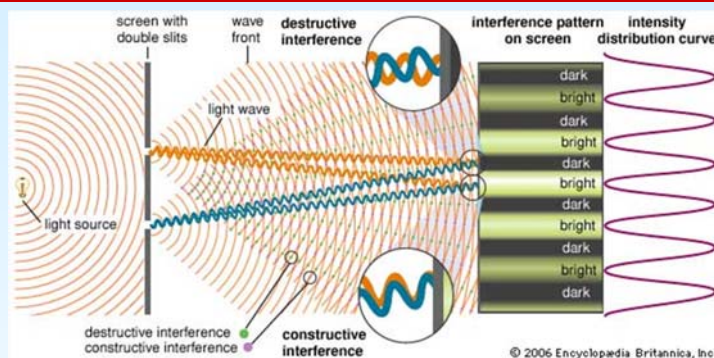


Om bredden av spalten är lika med eller mindre än λ då observeras endast ett brett maximum.

En bredare spalt ger en smalare central topp.



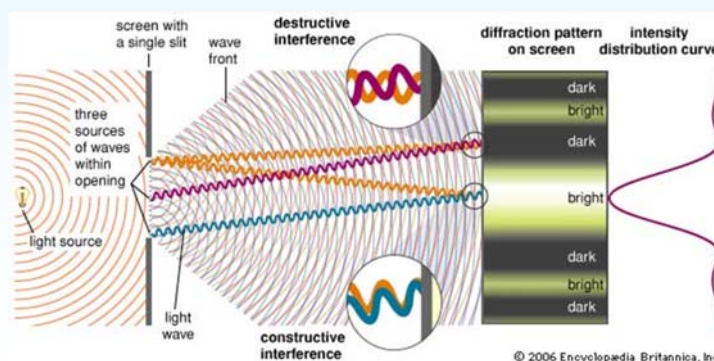
Diffraction Intensitet



$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2}$$

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

$$\tan(\theta) = y / R \approx \sin(\theta)$$



$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$$

$$\tan(\theta) = y / x \approx \sin(\theta)$$

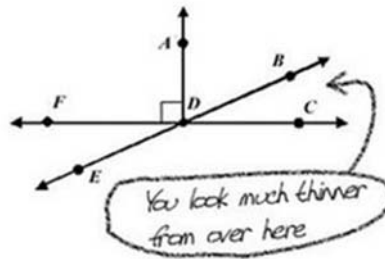


Diffraction Problem



Del 4. Problem lösning

3. Name an angle complimentary to BDC:

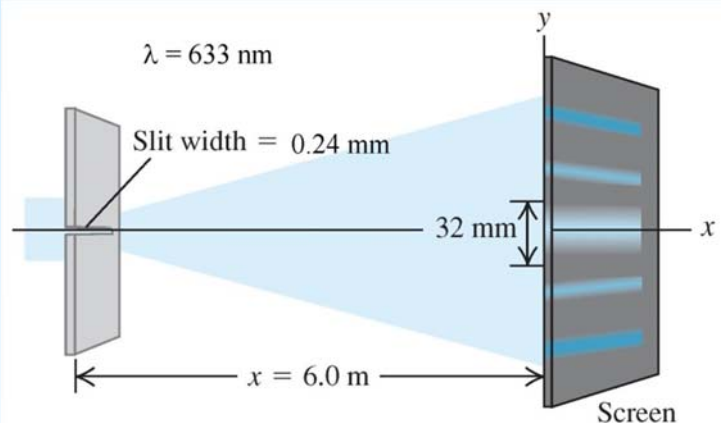


Diffraction Problem



Intensiteten i central toppen är I_0 .

Vad blir intensiteten 3.0 mm bort från denna topp ?



$\lambda = 633 \text{ nm}$
 $x = 6.00 \text{ m}$
 $a = 0.24 \text{ mm}$
 $y = 3.0 \text{ mm}$

$$\tan \theta = y/x = (3.0 \times 10^{-3} \text{ m}) / (6.0 \text{ m}) = 5 \times 10^{-4} = \sin(\theta)$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta = \frac{2\pi(2.4 \times 10^{-4} \text{ m})(5.0 \times 10^{-4})}{6.33 \times 10^{-7} \text{ m}} = 1.20 \text{ rad}$$

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 = I_0 \left(\frac{\sin 0.60}{0.60} \right)^2 = 0.89 I_0$$



Diffraktion Problem



Intensiteten i central toppen i ett singel spalt spektrum är I_0 .

Vad är intensiteten i en punkt där fasskillnaden mellan vågor från toppen och botten av spalten är 66 radianer ?

Om denna punkt är 7.0° från central toppen, hur många våglängder bred är spalten ?

$$\beta = 66 \text{ rad}$$

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(33 \text{ rad})}{33 \text{ rad}} \right]^2 = (9.2 \times 10^{-4}) I_0$$

$$\theta = 7.0^\circ$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$$

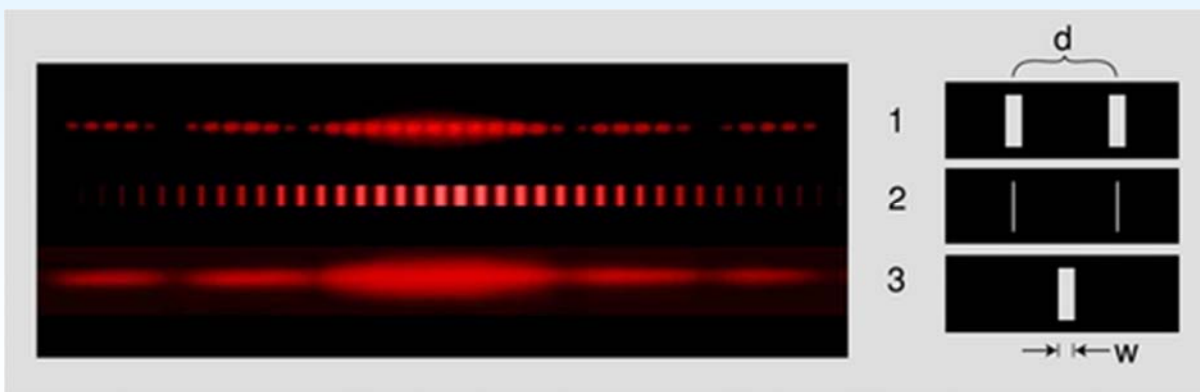
$$\frac{a}{\lambda} = \frac{\beta}{2\pi \sin \theta} = \frac{66 \text{ rad}}{(2\pi \text{ rad}) \sin 7.0^\circ} = 86$$



Diffraktion Två spalter



Del 5. Två breda spalter





Diffraction Två spalter



I studien av interferens från två spalter antogs det att de var mycket smala. Vad händer om de är breda?

Två smala spalter:

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2}$$

En bred spalt:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$

Två breda spalter:

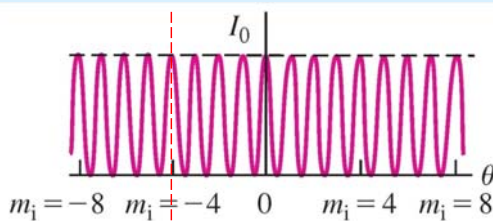
$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 \quad \text{där}$$

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

$$\beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

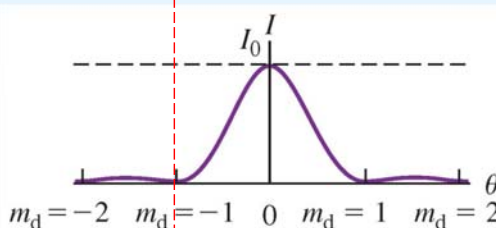
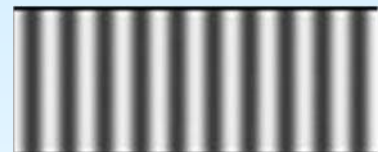


Diffraction Två spalter



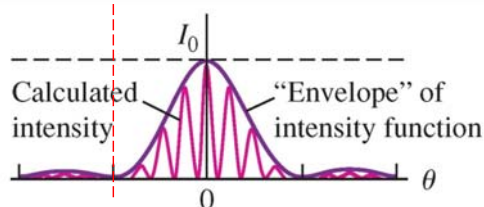
Två smala spalter:

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2}$$



En bred spalt:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$



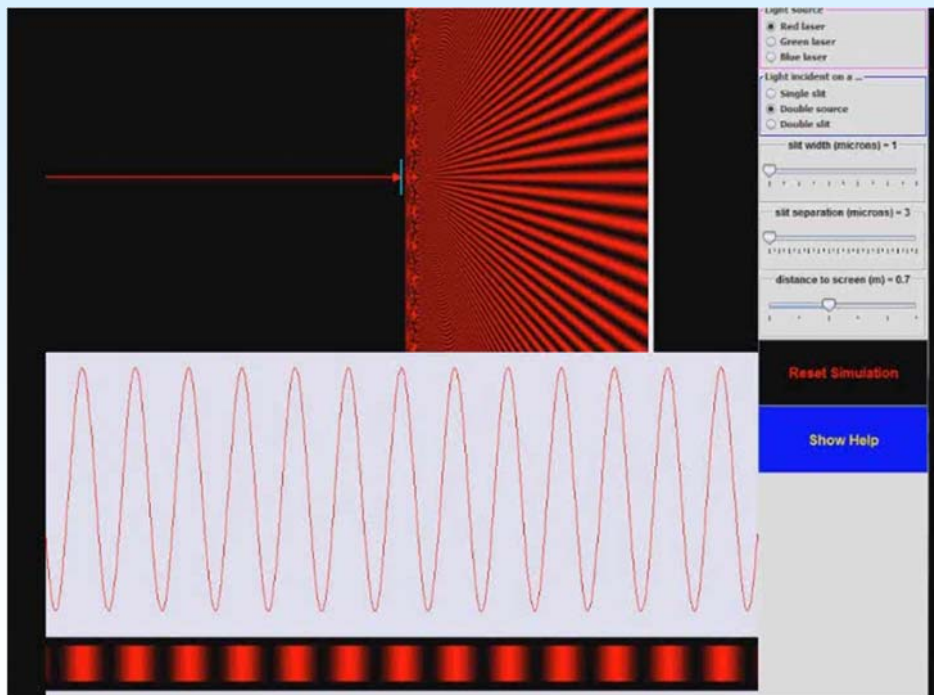
Två breda spalter:

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$





Diffraction Två spalter



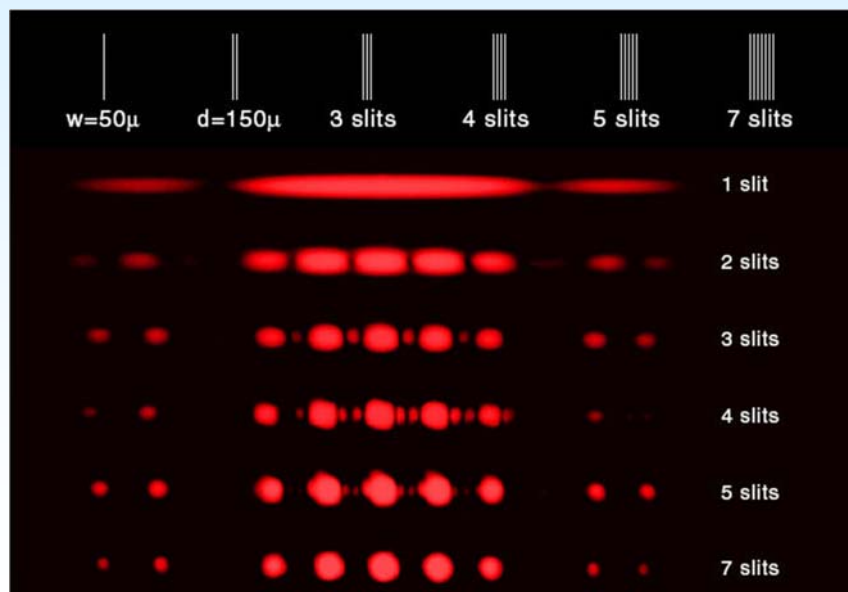
<http://www.opensourcephysics.org/items/detail.cfm?ID=9988>



Diffraction Många spalter



Del 6. Många spalter



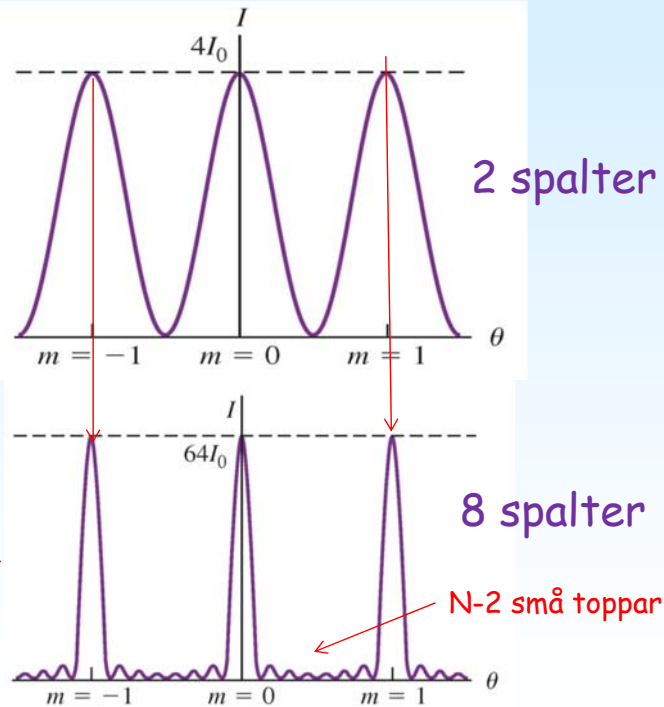
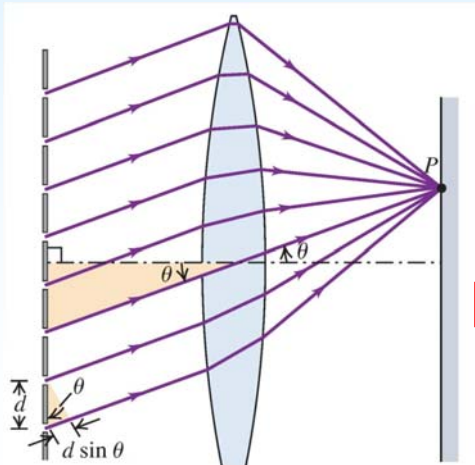


Diffraction Många spalter



Vägskillnaden mellan intilliggande spalter som ger maximal intensitet med många spalter ges av:

$$d \sin \theta = m \lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$



Diffraction Många spalter

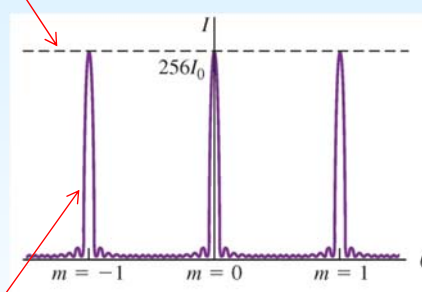
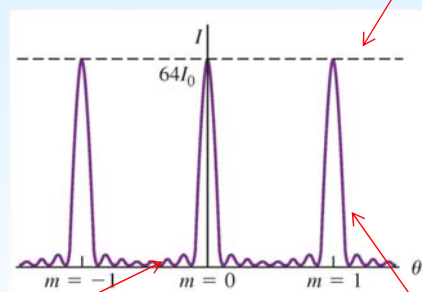
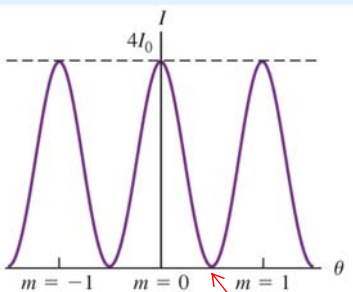


$$I_{\max} \sim N^2$$

N = 2

N = 8

N = 16



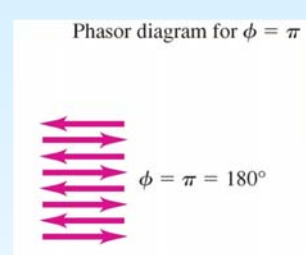
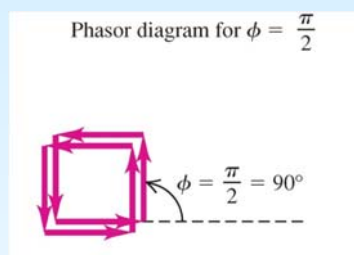
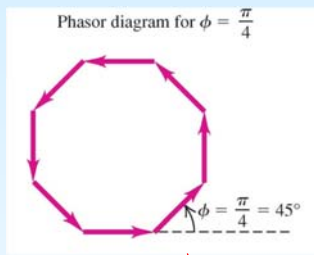
N-1 minimum

$$I_{\text{width}} \sim 1 / N$$

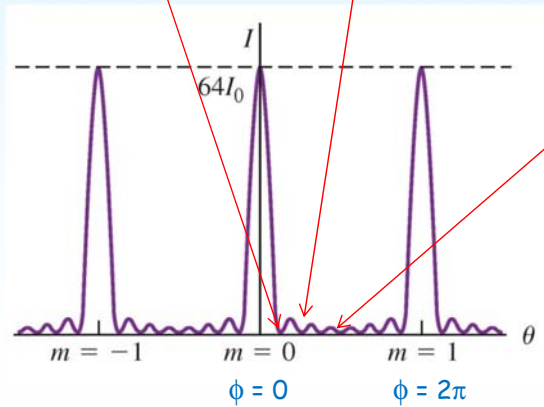
Huvud maximum: $d \sin \theta = m \lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$



Diffraction Många spalter



$N = 8$



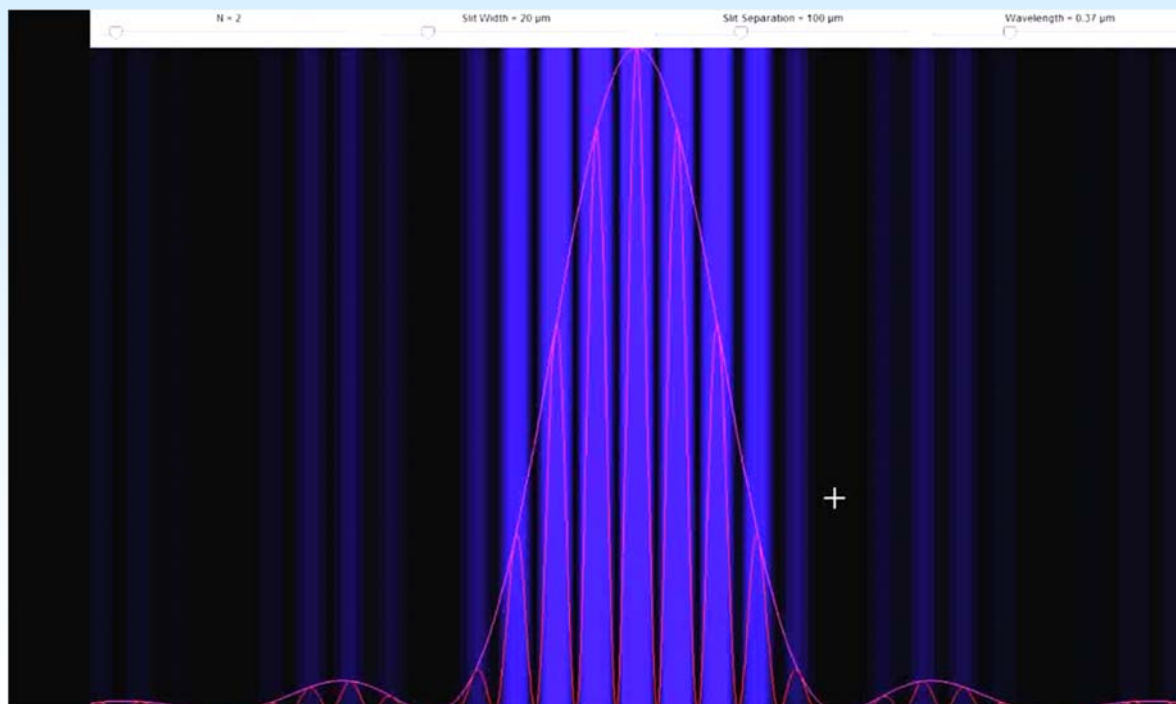
minimum för

$$\phi = k \frac{2\pi}{N}$$

där $k = 1, 2, \dots, N-1$



Diffraction Många spalter



<http://www.opensourcephysics.org/items/detail.cfm?ID=8331>

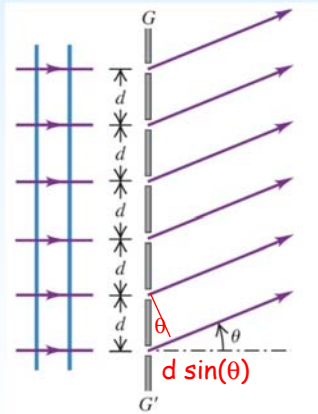


Diffraction Många spalter



I **diffractions gitter** använder man **tusentals spalter** eller tusentals reflekterande ytor. Detta ger mycket **smala huvud maximum** som kan användas för att bestämma våglängden av olika ljus.

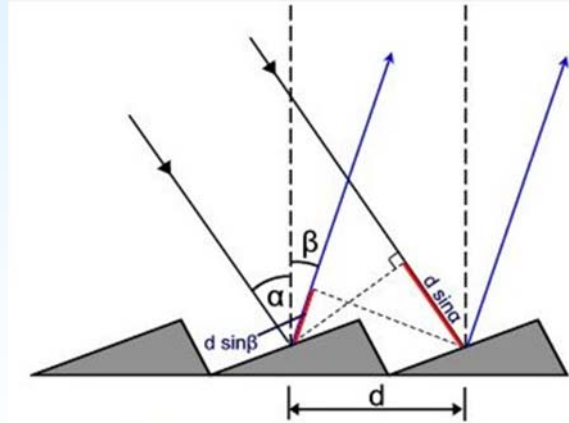
Transmissions gitter



Vägskillnaden för maximum:

$$\delta = d \sin(\theta) = m\lambda$$

Reflektions gitter



Vägskillnaden för maximum:

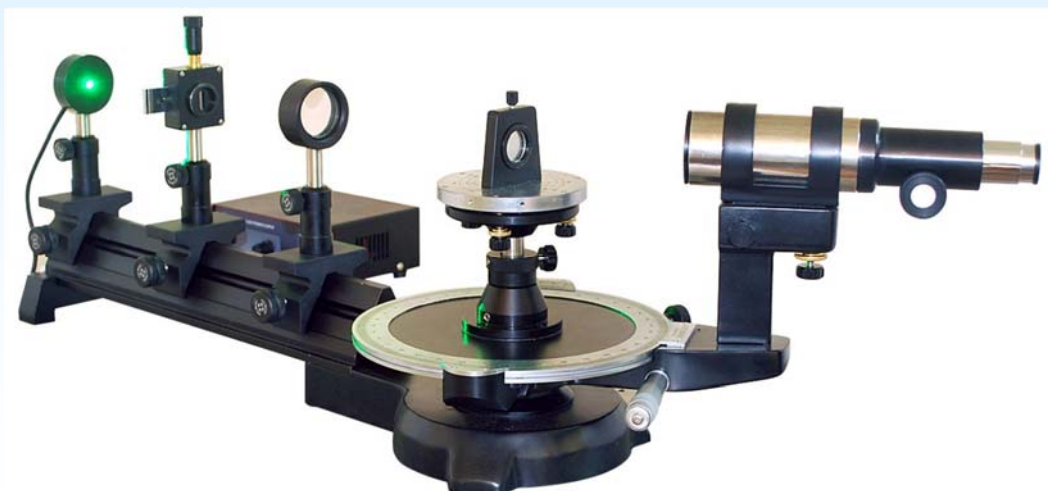
$$\delta = d \sin(\alpha) - d \sin(\beta) = m\lambda$$



Diffraction Spektrometrar



Del 7. Spektrometrar

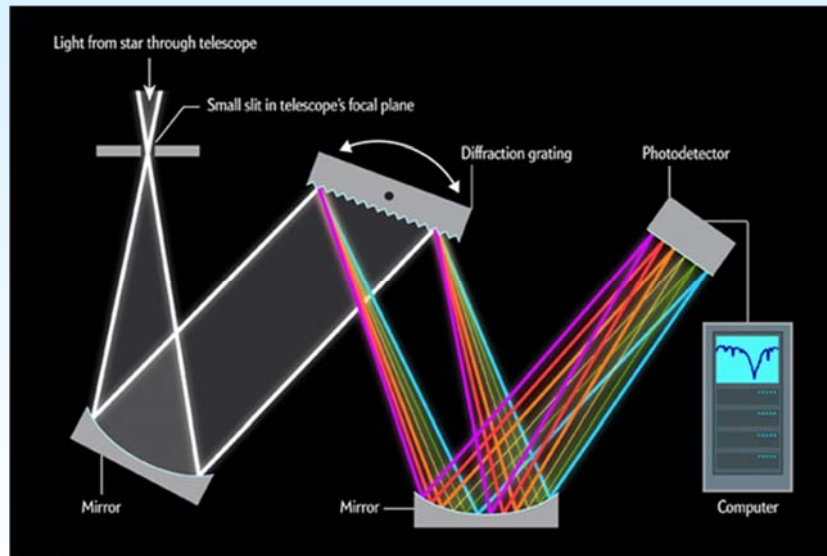




Diffraktion Spektrometrar



Spektrometer för astronomi



Ljus som infaller på ett gitter dispergeras i ett spektrum. Vinklarna för avvikelser hos maxima mäts för att beräkna våglängden.

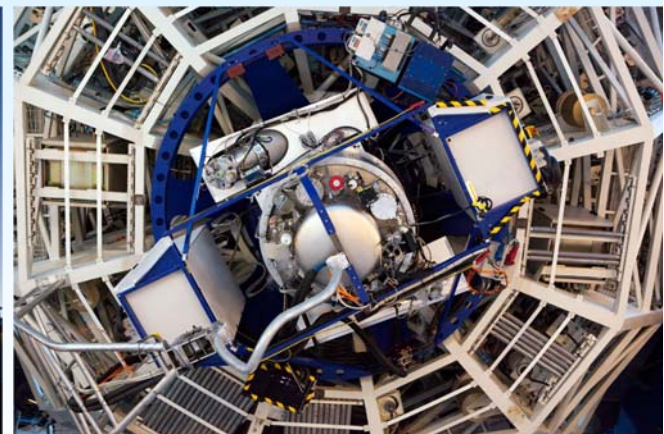


Diffraktion Spektrometrar



The ESO Very Large Telescope
(VLT) in Chile

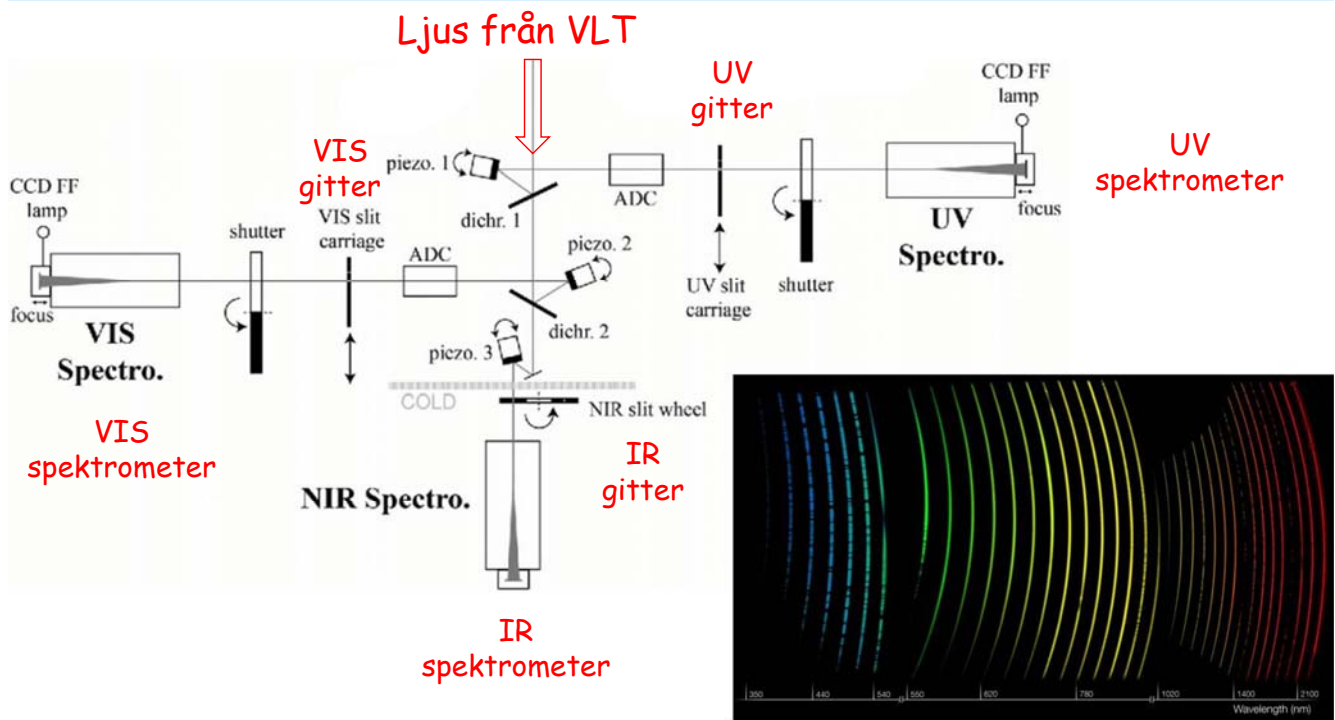
The XSHOOTER spectrometer
in the VLT



ESO: European Southern Observatory
<https://www.eso.org/public/>



Diffraction Spektrometrar



Diffraction Spektrometrar



Kromatisk upplösningförmåga :

Den minsta våglängdsskillnaden ($\Delta\lambda$) som kan mätas av en spektrograf.

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (\text{chromatic resolving power})$$

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$$

Antal spalter i ett gitter

Ordningen av toppen i diffraktions spectrat

R är högre för många spalter och högre ordningar !

XSHOOTER har som exempel $R = 4000-7000$ beroende på våglängd.

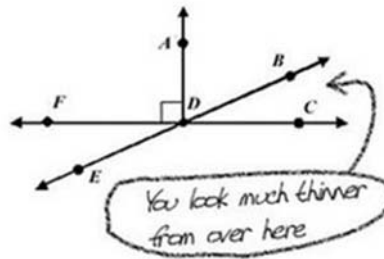


Diffraction Problem



Del 8. Problem lösning

3. Name an angle complimentary to BDC:

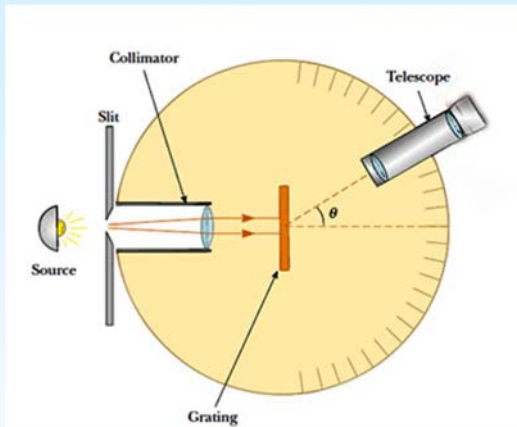


Vincent Hedberg - Lunds Universitet

49



Diffraction Problem



<https://www.youtube.com/watch?v=b85paV77dS8>

Gitter: 1000 spalter per mm Första maximum vid 24° Vad är λ ?

$$d \sin \theta = m \lambda \quad \text{med} \quad d = 1 \text{ mm} / 1000 \text{ slits} = 10^{-6} \text{ m}$$

$$\theta = 24^\circ$$

$$\lambda = d \sin(\theta) = 10^{-6} \sin(24^\circ) = 0.407 \times 10^{-6} = 407 \text{ nm}$$

Vincent Hedberg - Lunds Universitet

50

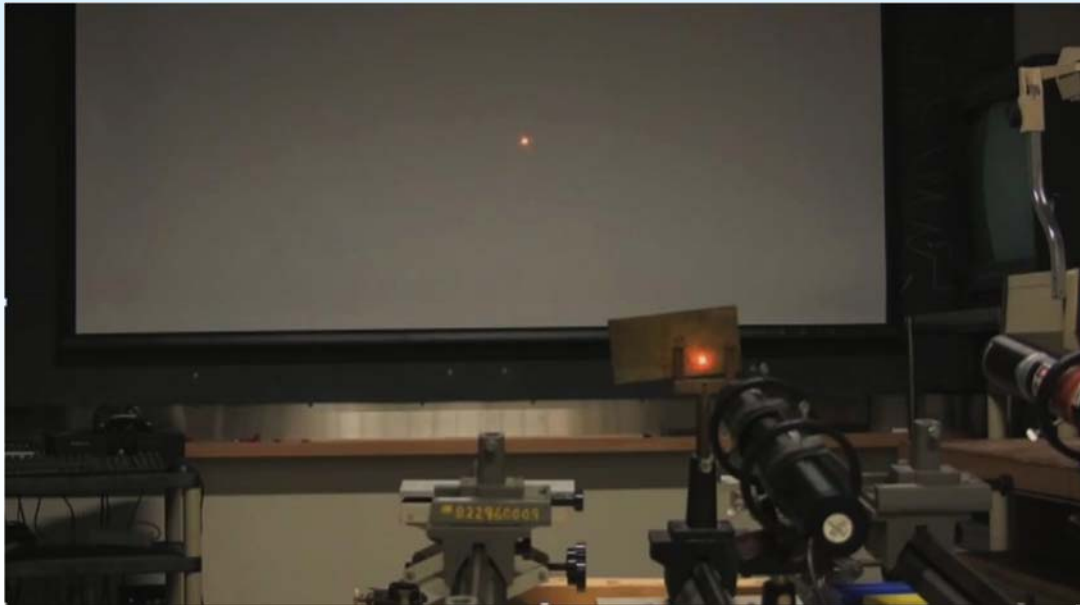


Diffraction

Hål diffraction



Del 9. Hål diffraction



<https://www.youtube.com/watch?v=9D8cPrEAGyc>

Vincent Hedberg - Lunds Universitet

51

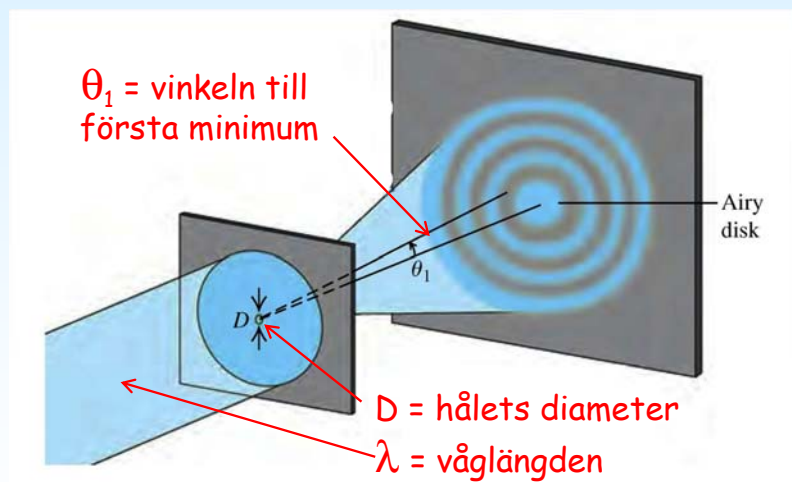


Diffraction

Hål diffraction



Diffraction begränsar vinkelupplösningen av optiska instrument.



Vinkeln till första minimum: $\sin \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ (diffraction by a circular aperture)

Vincent Hedberg - Lunds Universitet

52



Diffraction

Hål diffraction

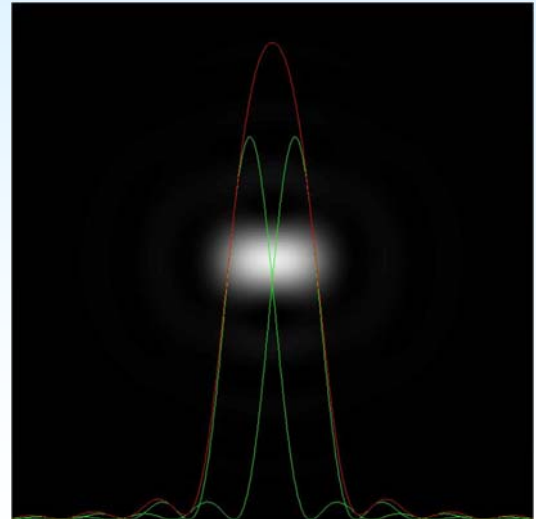
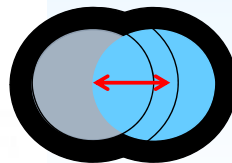
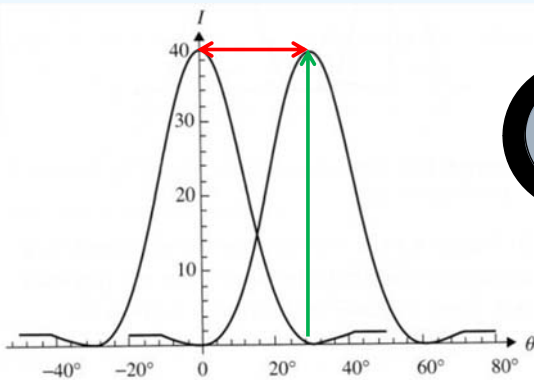


Rayleigh kriterium:

Två punktojekt kan upplösas av ett optiskt system om deras vinkel separation är större än θ_1

$$\sin \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

Gränsen för upplösningen av två föremål är när centrum av ett diffraktionsmönster är i det första minimum av det andra mönstret.



Diffraction

Hål diffraction



Upplösningförmåga:

Minsta vinkelavstånd mellan två objekt som kan upplösas av instrumentet.

Man får högre upplösningförmåga för korta våglängder och en stor optisk diameter eftersom

$$\theta_c = \frac{1.22 \cdot \lambda}{d}$$

Objektivets diameter

